Advance/FrontSTR

理論説明書

Theory Reference of Advance/FrontSTR

袁熙

アドバンスソフト株式会社

目次

[1. はじめに 1](#_Toc4503963)

[2. 基礎理論 2](#_Toc4503964)

[2.1. はじめに 2](#_Toc4503965)

[2.2. 連続体力学の基礎 2](#_Toc4503966)

[2.2.1. 運動力学 2](#_Toc4503967)

[2.2.2. 応力 9](#_Toc4503968)

[2.2.3. 保存則 12](#_Toc4503969)

[2.3. 境界値問題と仮想仕事の原理 16](#_Toc4503970)

[2.4. 熱伝導基本方程式 17](#_Toc4503971)

[2.5. 拡散方程式 20](#_Toc4503972)

[2.6. 流体変形方程式 21](#_Toc4503973)

[2.7. 音場 21](#_Toc4503974)

[3. 有限要素解析の枠組み 26](#_Toc4503975)

[3.1. 問題設定 26](#_Toc4503976)

[3.2. 仮想仕事式の増分分解 27](#_Toc4503977)

[3.2.1. 幾何非線形を考慮しない時の定式化 27](#_Toc4503978)

[3.2.2. Total Lagrange法 29](#_Toc4503979)

[3.2.3. updated Lagrange法 33](#_Toc4503980)

[3.2.4. Arbitrary Lagrangian-Eulerian(ALE)法 35](#_Toc4503981)

[3.3. Newton-Raphson法 37](#_Toc4503982)

[4. 動的解析有限要素法 41](#_Toc4503983)

[4.1. 基本方程式 41](#_Toc4503984)

[4.1.1. 減衰 41](#_Toc4503985)

[4.1.2. 集中質量マトリクス 44](#_Toc4503986)

[4.2. 直接時間積分法 44](#_Toc4503987)

[4.2.1. 中央差分法 45](#_Toc4503988)

[4.2.2. Newmark-β法 45](#_Toc4503989)

[4.2.3. Hilber-Hughes-Taylor (HHT) 法 47](#_Toc4503990)

[4.2.4. Generalized α法 48](#_Toc4503991)

[4.2.5. 周波数応答解析 48](#_Toc4503992)

[4.3. 固有値解析 48](#_Toc4503993)

[4.3.1. シフト 49](#_Toc4503994)

[4.3.2. モード別有効質量とモード刺激係数 50](#_Toc4503995)

[4.4. モーダル応答解析 50](#_Toc4503996)

[4.4.1. 基礎理論 51](#_Toc4503997)

[4.4.2. 過渡応答解析 52](#_Toc4503998)

[4.4.3. 周波数応答解析 55](#_Toc4503999)

[4.5. 慣性リリーフ解析(Inertia Relief Analysis) 57](#_Toc4504000)

[5. 材料ライブラリ 60](#_Toc4504001)

[5.1. 線形弾性材料 60](#_Toc4504002)

[5.1.1. 等方性線弾性材 60](#_Toc4504003)

[5.1.2. 直交性線弾性材 61](#_Toc4504004)

[5.2. 超弾性材料 61](#_Toc4504005)

[5.2.1. 多項式超弾性モデル 63](#_Toc4504006)

[5.2.2. 低減多項式超弾性モデル 64](#_Toc4504007)

[5.2.3. Neo-Hookean超弾性モデル 64](#_Toc4504008)

[5.2.4. Mooney-Rivlin超弾性モデル 64](#_Toc4504009)

[5.2.5. Yeoh超弾性モデル 65](#_Toc4504010)

[5.2.6. Arruda-Boyce超弾性モデル 65](#_Toc4504011)

[5.2.7. Ogden超弾性モデル 66](#_Toc4504012)

[5.2.8. 発泡超弾性体モデル 66](#_Toc4504013)

[5.2.9. St. Venant-Kirchhoff超弾性モデル 67](#_Toc4504014)

[5.3. 弾塑性材料 68](#_Toc4504015)

[5.3.1. 亜弾性－塑性材料モデル 68](#_Toc4504016)

[5.3.2. 移動硬化則への拡張 70](#_Toc4504017)

[5.3.3. 応力更新アルゴリズム 72](#_Toc4504018)

[5.3.4. Consistent接線係数 76](#_Toc4504019)

[5.3.5. 降伏関数 77](#_Toc4504020)

[5.4. 粘性材料 87](#_Toc4504021)

[5.5. 粘弾性材料 88](#_Toc4504022)

[5.5.1. 粘弾性材料の性質 88](#_Toc4504023)

[5.5.2. 一般化されたMaxwellモデル 95](#_Toc4504024)

[5.5.3. 更新アルゴリズムおよびConsistent接線係数 96](#_Toc4504025)

[5.5.4. 動的粘弾性 97](#_Toc4504026)

[5.5.5. 温度依存性 99](#_Toc4504027)

[5.6. 粘塑性材料 101](#_Toc4504028)

[5.6.1. 粘塑性材料の変形特徴 101](#_Toc4504029)

[5.6.2. 一般化粘塑性モデル 102](#_Toc4504030)

[5.6.3. 降伏面が有する粘塑性モデル 104](#_Toc4504031)

[5.6.4. 本ソフト導入した粘塑性モデル 106](#_Toc4504032)

[6. 要素ライブラリ 109](#_Toc4504033)

[6.1. 有限要素による空間離散方法 109](#_Toc4504034)

[6.1.1. 有限要素補間 109](#_Toc4504035)

[6.1.2. 数値積分 110](#_Toc4504036)

[6.2. ソリッド要素 111](#_Toc4504037)

[6.2.1. 四面体要素 111](#_Toc4504038)

[6.2.2. 五面体（ピラミッド）要素 112](#_Toc4504039)

[6.2.3. プリズム要素 114](#_Toc4504040)

[6.2.4. 六面体要素 116](#_Toc4504041)

[6.2.5. 無限要素 120](#_Toc4504042)

[6.3. シェル要素 120](#_Toc4504043)

[6.3.1. アイソパラメトリックシェル要素 121](#_Toc4504044)

[6.3.2. MITCシェル要素 125](#_Toc4504045)

[6.4. 梁要素 130](#_Toc4504046)

[6.4.1. アイソパラメトリック梁要素 132](#_Toc4504047)

[6.4.2. 梁要素 137](#_Toc4504048)

[6.5. トラス要素・ケーブル要素 143](#_Toc4504049)

[6.6. Rebar要素 144](#_Toc4504050)

[6.7. マス要素 145](#_Toc4504051)

[6.8. ガスケット要素 146](#_Toc4504052)

[6.9. 剛体要素・準剛体要素 147](#_Toc4504053)

[6.9.1. モーメントと回転モーメント 148](#_Toc4504054)

[6.9.2. 変形する要素と組み立て 148](#_Toc4504055)

[7. 境界条件 150](#_Toc4504056)

[7.1. 付加質量 150](#_Toc4504057)

[8. 接触解析 152](#_Toc4504058)

[8.1. 接触力学 152](#_Toc4504059)

[8.1.1. 表記法 152](#_Toc4504060)

[8.1.2. 接触キネマティクス 153](#_Toc4504061)

[8.1.3. 接触拘束条件 156](#_Toc4504062)

[8.2. 接触問題の弱形式 158](#_Toc4504063)

[8.2.1. 変分形式 158](#_Toc4504064)

[8.2.2. 接触拘束条件の処理方法 162](#_Toc4504065)

[8.2.3. 接触仮想仕事の線形化処理 165](#_Toc4504066)

[8.3. 有限要素法接触解析 169](#_Toc4504067)

[8.3.1. はじめに 169](#_Toc4504068)

[8.3.2. 接触の離散化表現 170](#_Toc4504069)

[8.3.3. Augmented Lagrange法 176](#_Toc4504070)

[8.3.4. 微小すべり解析 180](#_Toc4504071)

[8.3.5. まとめ 181](#_Toc4504072)

[9. 付録 182](#_Toc4504073)

[9.1. MPCを考慮したCG法 182](#_Toc4504074)

[9.2. 座標変換 184](#_Toc4504075)

[9.2.1. 埋め込み座標系中のひずみと応力 184](#_Toc4504076)

[9.2.2. 埋め込み座標系から他の座標系への変換 185](#_Toc4504077)

[10. 参考資料 188](#_Toc4504078)

# はじめに

　本ソフトウェアAdvance/FrontSTRは、大規模並列計算汎用有限要素プログラムであり、固体の静的変形解析、固有値解析、熱伝導解析および線形動解析に関する三次元解析が可能である。

　平成21年度の文科省のプロジェクト「次世代ものづくりシミュレーションソフトウェアの作成」業務における「非線形構造解析機能の作成」において、FrontSTR2.02をベースには幾何非線形・材料非線形・接触非線形解析機能を追加し、FrontISTR3.0をリリースされた。Advance/FrontSTR3.0はFrontISTR3.0をベースに開発したソフトである。

　Advance/FrontSTRの解析機能の計算手法は、幾何学的／材料非線形／境界非線形静解析においてはTotal Lagrange法およびUpdated Lagrangeを、固有値解析にはランチョス法を、線形動解析の過渡応答問題には直接積分法を採用している。また、非線形問題では、ニュートン・ラブソン法による繰り返し計算手法を用いている。本論文では、Advance/FrontSTR非線形解析に関わる基礎理論を紹介する。その目的は以下である。

・Advance/FrontSTRが対象範囲とする解析手法に関する理論について解説し、理論的裏付けとして提供する。

・ユーザーが現象解析にAdvance/FrontSTRを適用する際のモデル定義、解析結果の分析などにおける、理論的参考として提供する。

　。

# 基礎理論

## はじめに

有限要素法の基礎的理論としては、いわゆる連続体の力学によって定式化がされている。連続体の力学では、物体の変形状態を記述するために、物質点という概念を導入し、固体の状態を数学的なモデルで構成する。物質の任意の点の挙動については、連続体の点の位置（数学モデルなので、個体中のすべて点が3次元空間で定義された座標の座標値で表現できることになる）の変化を数学的な方法を用いて記述する。

上記に述べたように固体の状態は数学的なモデルに置き換えて、その変形を記述する。本章では、主にテンソル解析の方法を用いてAdvance/FrontSTRによる有限要素法解析の基礎理論を記述する。以下では、複数の成分を持つ変数（ベクトルとテンソル等）を太字で、スカラー量を標準字体で表す。

なお、テンソル解析においてはお互い双対の関係にある“共変基底と共変テンソル”および “反変基底と反変テンソル”などを区別する必要があるが、物質の変形前と変形後において、空間に固定された直角座標を共通に用いる場合は、双方とも共通となり区別する必要がなくなることから、両者を区別しない記述(ベクトルおよびテンソルの基底に対応した成分の右下添え字による表現）とする。ただし、第6章の接触解析に関しては、非直交な接ベクトル空間で問題記述を行うため、共変と反変の区別が必要となり、深く注意する必要がある。

## 連続体力学の基礎

### 運動力学

　連続体力学では、固体や流体に対してその特徴と応答が空間的な変数で示される滑らかな関数でモデリングされることを念頭においている。

　図2.2.1に示すように、時刻の初期状態にある物体を考える。このとき、初期状態での物体の領域をで示し、初期配置（initial configuration）と呼ぶこととする。また、その物体に対するモーションや変形を表れたとき、その状態は参照配置（reference configuration）と呼ばれ、様々な方程式によって表現される。

　また、現配置（current configuration）での物体の領域はで定義し、この領域の境界はで定義する。解析対象モデルの次元数はで定義する。ここで、「」は空間の次数である。

|  |
| --- |
| D:\job_advance\post革新\report\theory\figure\strain_mortion_2.gif |
| 図2.2.1 変形とモーション |

#### 変形と配置

　参照配置における物質点の位置ベクトルは、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.1) |

で与えられる。ここで、は、参照配置における位置ベクトルの成分であり、はCartesian座標系の単位基底ベクトルである。

　一方、現配置における座標位置は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.2) |

で与えられる。ここで、は現配置における位置ベクトル成分である。

　物体のモーションは、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.3) |

で定義される。ここで、は時刻における物質点の位置ベクトルである。この関数は参照配置から時刻の現配置へマッピングされてものとして考える。このとき、参照配置が初期配置と一致するならば、時刻での任意点における位置ベクトルは物質座標系に一致する。つまり、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.4) |

となる。

　連続体の変形とその応答に関する表記方法は2通りある。1つ目は、式(2.2.3)のように物質座標系と時刻を独立な変数として扱う表記方法である。この表記法は物質表記（material description）もしくはLagrangian表記と呼ばれる。2つ目は、空間座標系と時刻を独立な変数として扱う表記方法である。この表記法は空間表記（spatial description）もしくはEulerian表記と呼ばれる。

本書で用いる表記方法では、空間表記するものをとし、物質表記するものをで表すこととする。このとき、この2つの関係は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.5) |

で関連づけられるものとする。

#### 変位ベクトル・速度ベクトル・加速度ベクトル

変位ベクトル は物質点に対して図2.2.1に示すように現位置と参照位置との差によって表される。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.6) |

ここで、であり、式(2.2.4)で示したモーションを用いて変位ベクトルを

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.7) |

と表記することもある。

速度ベクトルは物質点に対する位置ベクトルの変化率を表している。つまり、に対する物質時間微分（material time derivative）は一定に保たれ、次のように定義される。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.8) |

この式(2.2.8)の第3項では、モーションが変位ベクトルに置き換えられている。また、の上に付いているドットは物質時間微分を意味している。

　加速度ベクトルは物質点に対する速度ベクトルの変化率を表しており、速度の物質時間微分でもある。このとき、加速度ベクトルは、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.9) |

と定義される。

　速度ベクトルが空間座標系や時刻tで表されている場合（つまり、）、この速度の物質時間微分は、チェインルールを用いて

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.10) |

と表される。このとき、空間座標系で表記された速度ベクトルが、物質座標系と時間の関数であることに注意が必要である。さらに、右辺第2項は対流項であり、は空間時間微分（spatial time derivative）と呼ばれる。式(2.2.10)をテンソル表記すると、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.11) |

となる。ここで、表記やはベクトルの左勾配であり、以下のように定義する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.12) |

　このように、空間配置で表記されている任意の変数や時刻における変数の物質時間微分は、チェインルールを用いて表される。例えば、スカラー関数とテンソル関数を例にとると、これらの物質時間微分は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.13) |
|  | (2.2.14) |

と表せる。ここで、上式の右辺第1項は空間時間微分であり、右辺第2項は対流項である。

#### 変形勾配テンソル

　有限変形解析の大きな特徴の一つに変形勾配テンソルを考慮することが挙げられる。これは変形前後の物理量を関連づけるものですべての式に含まれるものである。変形勾配テンソルは変形前の初期（物質）配置と変形後の現（空間）配置を関連づけるものであり、変形やひずみを表現するために用いられる。

変形勾配テンソルの定義は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.15) |

とする。このとき、現配置での位置ベクトル**x**と物質配置での位置ベクトルは変形勾配を用いて

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.16) |

として表すことができる。

#### ひずみ

　一般的ひずみは図2.2.2で示すように2つの要素ベクトルとをとに変形するようなスカラー積の変化を表す。このとき、空間配置のスカラー積は、初期配置のスカラー積に関するものであり、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.17) |

という関係がある。ここで、は右Cauchy-Green変形テンソルであり、変形勾配に対して

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.18) |

という関係で与えられる。また、スカラー積の変化は初期配置における位置ベクトルに関して

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.19) |

と関連づけられる。このとき、Green-Lagrangeひずみが定義される。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.20) |

Green-Lagrangeひずみは変位勾配に関する項を用いて次のようにも表される。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.21) |

　また、初期配置におけるスカラー積は、空間配置におけるスカラー積に関して、左Cauchy-Green変形テンソルとして表される。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.22) |

同様にスカラー積の変化は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.23) |

で表される。このとき、Almansi（Eulerian）ひずみは

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.24) |

と定義される。

|  |
| --- |
| D:\job_advance\post革新\report\theory\figure\velocity_gradient.gif |
| 図2.2.2 変形速度の概念図 |

#### 速度勾配・変形勾配

　現配置における速度を定義する。速度は式(2.2.8)で示すように空間座標での関数として表されている。このとき速度勾配テンソルは次式のように定義される。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.25) |
|  | (2.2.26) |

この定義については、図2.2.2で示されるように、空間座標系での表記されることは明白である。そして、現配置における微小要素の点に関するの相対速度の意味を持つ。

　また、速度勾配テンソルは、次式のように対称部分と反対称部分と分けられる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.27) |

このとき、変形速度テンソルはの対称部分であり、スピンテンソルはの反対称部分である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.28) |
|  | (2.2.29) |
|  | (2.2.30) |

　さらに、変形速度テンソルの定義式からチェインルールを用いて物質配置での勾配を与えると、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.31) |

となる。ここで、変形勾配の定義よりであることから、変形勾配の物質時間微分は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.32) |

さらに、であることから、最終的に変形勾配テンソルは、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.33) |

と書き直すことができる。さらに、式(2.2.28)と式(2.2.33)の2つのひずみの関係は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.34) |

と表すこともできる。Green-Lagrangeひずみにおける時間微分は、材料ひずみ速度テンソル（material strain tensor）と呼ばれ、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.35) |

となる。

　初期配置で表される材料ひずみ速度テンソルは、現配置でも表記することができ、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.36) |

となる。

### 応力

#### 各種応力の定義

　非線形問題において様々な応力が定義されている。ここでは、3つの応力について定義することとする。

　Cauchy応力はCauchy則で定義される。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.37) |

公称応力**P**は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.38) |

と表せる。第2 Piola-Kirchhoff応力**S**は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.39) |

と定義される。

|  |
| --- |
| 表 2.2.1 応力の変換式 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | |  | Cauchy stress | Nominal stress | 2nd Piola-Kirchhoff stress | |  | － |  |  | |  |  | － |  | |  |  |  | － | |  |  |  |  | |

|  |
| --- |
|  |
| 図2.2.3 応力の変換の概念図 |

　各種応力は変形の関数に対して相互関係があり、表 2.2.1にてその関係を示す。このような関係式は参照配置の法線と現配置の法線の関係を表すNansonの関係式を用いて上式(2.2.37)～(2.2.39)のような関係になる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.40) |

　応力を考える上で、初めにCauchy応力と公称応力はで表され、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.41) |

となる。ここで、公称応力は第1Piola-Kirchhoff応力と呼ばれることもある。このとき、Nansonの関係式を用いて、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.42) |

となり、以下の式が成り立つ。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.43) |

このとき、上式(2.2.43)から公称応力は非対称なテンソルであることが分かる。また、公称応力はをかけることにより第2 Piola-Kirchhoff応力に変換される。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.44) |

この式をインデックス表記すると、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.45) |

さらに、展開すると、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.46) |

以上より、公称応力（第1 Piola-Kirchhoff応力）と第2 Piola-Kirchhoff応力の関係は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.47) |

である。また、式(2.2.43)および式(2.2.47)より、Cauchy応力と第2 Piola-Kirchhoff応力との関係式は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.48) |

となる。この関係は、初期配置から現配置へpush forwardした式を意味している。逆に、pull backした場合は、次式のように表される。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.49) |

　上記より、Cauchy応力と第2 Piola-Kirchhoff応力の関係は、変形勾配とヤコビアン（体積変化率）のみに依存することが分かる。つまり、この変形勾配が既知量であるならば、Cauchy応力、公称応力、第2 Piola-Kirchhoff応力のどれかで応力を表すことができる。また、式(2.2.39)からも分かるようにCauchy応力は対称テンソルであり、同様に第2 Piola-Kirchhoff応力も対称テンソルとなる。

#### 客観性を有する応力速度

　観測座標系に依存しないテンソルやその速度は「客観性が有する」という。ここでは、客観性の有する代表的な応力速度であるJaumann速度、Truesdell速度、Green-Naghdi速度について簡単に説明をする。

##### Jaumann速度

Cauchy応力のJaumann速度は次式で与えられる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.50) |

ここで、はスピンテンソルである。右肩の記号「」は客観速度を意味し、「J」はJaumann速度を指す。

##### Truesdell速度およびGreen-Naghdi速度

Cauchy応力のTruesdell速度は次式で与えられる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.51) |
|  |

また、Cauchy応力のGreen-Naghdi速度は次式で与えられる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.52) |

ここで、は主軸系におけるスピンテンソルである。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.53) |

Green-Naghdi速度は、Jaumann速度で用いたスピンテンソルに対する材料の回転の定義を角速度へ変更したものである。また、Truesdell速度とJaumann速度の関係は、速度勾配を対称テンソル（変形速度テンソル）と反対称テンソル（スピンテンソル）に置き換えることができるため、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.54) |

となることから、Truesdell速度はJaumann速度におけるスピンテンソルに関する項に加えて、変形速度に依存する項も含まれていると言える。

##### 第2Piola-Kirchhoff応力速度

時刻tでの現配置を基準とする時刻τでの第2Piola-Kirchhoff応力の速度

をとる。として求めるが時刻t0の配置を基準とする第2Piola-Kirchhoff応力の速度からpush forwardしたものであり、以下に関係がある。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.55) |

この式を展開すると

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  | (2.2.56) |

となり、式(2.2.51)で示したCauchy応力のTruesdell速度と一致することが分かる。

### 保存則

#### 質量保存の原理

　領域内における質量を以下のように定義する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.57) |

ここで、は密度である。質量保存の原理（principle of conservation of mass）とは、任意の物質領域内の質量が時間に依存せずに

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.58) |

が成立することを意味する。上式(2.2.58)の空間時間導関数から導かれ、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.59) |

である。変形後の質量も一定であるとしている。ここで、密度は空間配置における密度であり時間に依存することから、基準配置における密度を用いて時間微分を行うと、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.60) |

となる。ここで、である。これより、任意の物質領域に対して、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.61) |

となる。この式は連続の式（equation of continuity）と呼ばれる。非圧縮性連続体ではDρ/Dt=0であるから

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.62) |

　また、基準配置における密度における連続式は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.63) |

となり、Lagrange法を採用した時

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.64) |

となる。

#### 運動量保存則・角運動量保存則

物体に作用する力には物体力ベクトルρ**b**と表面力ベクトル**t**がある。ただし、ρ**b**は単位体積当たりの力、**t**は単位面積当たりの力である。物体全体におけるこれらの和と運動量の速度は次式のよう等置される。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.65) |

上式を変換し、次のように表すことができる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.66) |

この式に式(2.2.61), (2.2.37)および発散定理を適応すると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.67) |

となり、これが物体の任意の一部分について成立することから

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.68) |

となる。これはCauchyの第1運動法則または平衡方程式と呼ばれる。

　一方、角運動量保存則は物体力および表面力のモーメントと運動量のモーメントの速度を

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.69) |

として関連づけている。この式の右辺第2項のtに式(2.2.37)を代入すると次式を導くことができる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.70) |

　上式に平衡方程式(2.2.66)を用いると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.71) |

を得る。上式が成立するためには

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.72) |

すなわち，Cauchy応力は対称である。

　空間座標系(Euler座標系)を利用する時、式(2.2.68)中の物質微分D**v**/Dtを空間微分まで書き換える必要がある。この式は以下である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.73) |

#### エネルギー保存則

　物体に作用する全エネルギーの変化率は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.74) |

と表される。ここで、は内部エネルギー変化率、は運動エネルギー変化率と定義する。また、領域内における物体力と表面力の仕事率は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.75) |

と書ける。このとき、熱量や熱流束によるエネルギーは、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.76) |

となる。ここで、熱流束項の正負は、熱が物体外へ放出される方向を負とする。このとき、エネルギーの保存状態は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.77) |

と表すことができる。以上のことから、物体に作用する全エネルギー変化率は外力による仕事率と熱流束によって供給される仕事率が等しくなる。これを熱力学の第1法則と呼ぶ。

　内部エネルギーの損失量は材料に依存する。弾性材料の内部エネルギーは変形中に蓄えられ、除荷過程において解放される。また、弾塑性材料の内部エネルギーは熱等に変換され、材料内部のエネルギーが失われる。このことから、エネルギー保存の状態は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.78) |

と表される。上式に対して、Reynoldの定理やGaussの定理を用いて整理すると、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.79) |

となる。そして、運動力保存則(2.2.68)より、上式の積分記号中の最後の項が消える。最終的に、任意の領域において、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.80) |

が成り立ち、これをエネルギー保存則と呼ぶ。さらに、熱流束と熱量が発生しない場合には、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2.81) |

のみの式で表される。この式は物体の変形エネルギーの変化率はCauchy応力と変形速度テンソルの積であることを示している。

## 境界値問題と仮想仕事の原理

　静的な物体の運動を考える。物体表面Γの各点において単位面積当たりの表面力、あるいは変位が、また物体内の各点において単位体積当たり**b**の体積力が与えられるものとする。これらの境界条件を含め、物体は平衡状態にあるため次の諸条件を満足しなければならない。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.3.1) |
|  | (2.3.2) |
|  | (2.3.3) |

ここで、式(2.3.1)は式(2.2.70)で示される運動方程式、は力学的境界、は幾何学的境界である。

　式(2.3.1)に変位の変分をかけ、物体の全領域における積分をとると以下の式が得られる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.3.4) |
|  | (2.3.5) |

この式は式(2.3.1)~(2.3.3)の弱形式と仮想仕事原理式と呼ばれる。この式の右辺は外力による仮想仕事であり、式(2.2.78)と比べ、式(2.3.4)の左辺は変形エネルギーの仮想変化を表していることが分かる。

式(2.3.4)が現配置で表したものである。この表示法は運用上にしばしば面倒な計算が必要になることがあるため、この式を初期配置まで変換する必要がある。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.3.6) |

上式右辺の後半は以下のように変換する。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |  |
|  |  | (2.3.7) |

この式を式(2.3.7)に代入すれば,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.3.8) |

が得られる。この式は第2 Piola-Kirchhoff応力がGreen-Lagrangeひずみと共役な関係にあることを示している。

　式(2.3.6),(2.3.8)は式(2.3.4)に代入すると、時刻0の初期配置を基準とする時刻での仮想仕事式が得られる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.3.9) |

ここで、を利用した。

## 熱伝導基本方程式

1. 基本方程式

　領域Ω内の発熱Q, その境界面の熱流束qとし、この領域内のenthalpyの時間変化との関係式は以下である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4.1) |

ここで、Gaussの積分定理を使いとなり、上式は以下になる

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4.2) |

この式は任意な領域内に成立しなければならないため、以下の式は成り立つ

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4.3) |

これは熱伝導方程式の強形式である。

　熱流束qと温度Tの関係式については、本ソフトは下記のFouriers則を使っている。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4.4) |

ここで、テンソルkijは熱伝導率であり、i方向の温度勾配はj方向熱流束密度の影響を示す材料係数である。また、均一材料のenthalpyは下式から計算できる

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4.5) |

ここで、T0は基準温度、ρは密度、cは比熱である。ただし、T0~Tの間に相変態のある時、潜熱(latent heat)Lを考慮する必要もあり、enthalpyは下式から計算できる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4.6) |

　式(2.4.4)と(2.4.6)を式(2.4.3)に代入すると、下記の熱伝導方程式が得られる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4.7) |

1. 弱形式

以下の熱伝導境界値問題を考慮する

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4.8) |
|  | (2.4.9) |
|  | (2.4.10) |

ここに、Tは温度、tは時間、Qは発熱率、ρは密度、cは比熱、kは熱伝導率、qは境界での熱流束である。本ソフトは以下の3種類の熱流束が考慮できる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4.11) |
|  | (2.4.12) |
|  | (2.4.13) |
|  | (2.4.14) |

ここで、qsは分布熱流束、qcは対流熱伝達による熱流束、qrは輻射熱伝達による熱流束である。ただし、Tcは対流熱伝達率雰囲気温度、hcは対流熱伝達係数、Trは輻射熱伝達率雰囲気温度、hrは輻射熱伝達係数であり、、εは輻射率、σはStefan Boltzmann定数，Fは形態係数である。

式(2.4.8)に温度の変分をかけ、物体の全領域における積分をとると以下の式が得られる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4.15) |
|  | (2.4.16) |

さらに、式(2.4.15)に式(2.4.10)を代入すると、以下になる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4.17) |

この式は熱伝導解析の基本方程式であり、その有限要素法離散式は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4.18) |

である。さらに式(2.4.13)と(2.4.14)を代入すると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4.19) |

になる。

3. 時間差分方法

　式(2.4.22)は以下のような時間差分を書き換え, 時刻tにおける既知温度を用いてt+Δtにおける温度を求めることができる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4.20) |

上式はそれぞれ前進Euler法、後退Euler法やCrank-Nicolson法である。時刻t+Δtでの各物理量を以下の通りとおくと

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4.21) |

Crank-Nicolson法は下式に示すように、前進Euler法と後退Euler法の平均であることをみなすことができる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4.22) |

本ソフトは後退Euler法を採用している。

## 拡散方程式

1. 基本方程式

　拡散物質の密度C, Dは拡散係数とし、拡散方程式は以下である。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | | (2.5.1) |
|  | (2.5.2) | |
|  | (2.5.3) | |
|  | (2.5.4) | |

式(2.5.4)は偏析条件であり、Si部分からSj部分までの種fluxを示している。また、hは輸送係数であり、mは偏析係数である。

その弱形式は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.5.5) |

## 流体変形方程式

　流体は粘性応力はひずみ速度の関数である、この特徴を考慮し、式(2.2.73)を書き換える。まず、流体応力は静水圧力p**I**と粘性力**τ**を分解して書く。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.6.1) |

流体の構成式は粘性応力**τ**とひずみ速度**e**の関係を表し、等方性流体の場合では

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.6.2) |

ここでは、μは第一粘性係数、λは第二粘性係数である。この式を式(2.6.1)に代入し、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.6.3) |

となり、この式を(2.2.73)に代入すると下記Navier-Stokes方程式が得られる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.6.4) |

## 音場

　音場は渦なし流体波であり、速度ポテンシャル関数で表すことができる。流体粒子速度Vと圧量Pと速度ポテンシャル関数Ψの関係は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.7.1) |

である。その速度ポテンシャルΨは以下の波動方程式が成り立つ。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.7.2) |

ここで、ポテンシャルΨをFourier展開

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.7.3) |

をする。各周波数成分に対して、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.7.4) |

となり、Helmholz方程式に変換することができる。

境界条件は、各周波数成分に対して、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.7.5) |

の混合境界条件を課す。この境界条件は数学的な記述であるが、物理的には

・　音源となる界面の圧力振動

・　音源となる界面の速度・加速度

・　界面のインピーダンス

を与えることができる。



1) 時系列音圧による境界条件

　まず、音圧の時系列変動で与えられた場合について示す。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.7.6) |

一方、音圧も時間方向に、Fourier展開して、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.7.7) |

と表現する。従って、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.7.8) |

となる。上記の数学的な表現で記述すると、

|  |  |
| --- | --- |
| 、、 | (2.7.9) |

2) 加速度境界条件

　次に、加速度の時系列変動で与えられた場合について示す。基本的な関係式は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.7.10) |
|  | (2.7.11) |
|  | (2.7.12) |

である。一方、加速度も時間方向に、Fourier展開して、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.7.13) |

と表現する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.7.14) |
|  | | (2.7.15) |

従って、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.7.16) |

となる。上記の数学的な表現で記述すると、

|  |  |
| --- | --- |
| 、、 | (2.7.17) |

となる。すでに周波数毎の加速度が与えられている場合には、その値を上記のとすればいい。

3) インピーダンス条件

物理的に与えられるインピーダンスは、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.7.18) |

である。壁に対してnormal方向の成分が有効であるため、を壁での法線ベクトルとして、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.7.19) |

が成り立つ。ここで、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.7.20) |

を利用すると、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.7.21) |
|  | (2.7.22) |

となる。従って、周波数成分毎に、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.7.23) |

が成り立ち、上記の数学的な表現で記述すると、

|  |  |
| --- | --- |
| 、、 | (2.7.24) |

となる。また、周波数毎にインピーダンスを与える場合には、

|  |  |
| --- | --- |
| 、、 | (2.7.25) |

とすればいい。

4)

上記Helmholz方程式に変分をかけ、物体の全領域における積分をとると以下の弱形式が得られる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.7.26) |
|  | (2.7.27) |

この式は音響解析の基本方程式である。式(2.7.5)を上式に代入し、その有限要素法離散式が得られる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.7.28) |

ここでは、β=0の場合では

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.7.29) |

を直接代入すればよい。

# 有限要素解析の枠組み

　第２章では連続体力学の基礎式を解説し、最終的に仮想仕事に帰着した。本章ではこれを基づき仮想仕事式を増分分解し、さらに空間離散化し本ソフトで用いられる有限要素法における解析手法について説明する。

## 問題設定

|  |
| --- |
| D:\job_advance\post革新\report\Theory\figure\configuration.gif |
| 図3.1.1 配置と物体の運動 |

有限ひずみ理論に基づく非線形解析では、仮想仕事の式や運動方程式をNewton-Raphson法を用いて陰的に解くことが多い。一般的な非線形有限要素法では、ある小さな荷重増分量に対する変位量を求め、それを積み重ねることで最終的な変形状態へ至る増分解析を行う。

　図3.1.1では、現配置の時刻までが解析済みで既知量として与えられていることを想定し、秒後の時刻における物体の状態を有限要素法により求めるものとする。このように、時刻の未知の状態の仮想仕事式をLagrange表記するにあたって、時刻の初期配置を参照するか、増分を開始する時刻の配置を参照するのかによって数値解法の手法が異なる。前者はtotal Lagrange法、後者はupdated Lagrange法と呼ばれる。

　以降では、常に解析対象物の時刻と配置を意識しながら定式化を進めていかなければならないため、表記方法について整理を行う。

　本理論説明書において一貫して用いられている基本ルールであるが、初期配置に関する変数（例えば、第1・第2 Piola-Kirchhoff応力や、位置ベクトル）は大文字で表記し、現配置に関する変数（例えば、Cauchy応力、位置ベクトル）は小文字で表記している。さらに、本節のようなLagrange表記においては、時刻に関する表記法を追加しなければならない。

## 仮想仕事式の増分分解

　図3.1.1を参照して、時刻までの状態は既知であり、時刻における物体の状態を求めるものとする。この時、解くべき時刻の境界値問題は以下のようになる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.1) |
|  | (3.2.2) |
|  | (3.2.3) |

式(2.3.4)を参照し、以下の仮想仕事式が導かれる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.4) |

しかし、時刻での配置はこの段階では未知であるため、この式を解けるわけがなく、その参照配置を時刻t0か、あるいは時刻かにとり、以下に示すようなTotal Lagrange法あるいはupdated Lagrange法の定式化が行われる。

### 幾何非線形を考慮しない時の定式化

　物体の変形(剛体回転、変形量を含む)は十分小さい場合では、初期配置t0、現配置、未知配置の区別が無視でき、幾何学的には線形問題にみなすことができる。この仮想仕事式は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.5) |
|  | (3.2.6) |

となる。ここでは、便利上に初期配置t0をとる。また、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.7) |

は微小変形ひずみであり、**σ**の対称性からが分かる。さらに、幾何非線形を考慮しない時の応力－ひずみ関係式は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.8) |

で与えられる。ここで、は4階の接線係数とする。

　仮想仕事式(3.2.5)に対して有限要素離散化を行うと、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.9) |

となる。ここでは、は要素領域と指す。有限要素毎に要素を構成する節点の変位を用いて変位場を次式のように内挿する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.10) |

このとき、ひずみは式(3.2.7)を用いて次式のように与えられる（第5章を参照）。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.11) |

式(3.2.10)、式(3.2.11)を式(3.2.9)に代入すると、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.12) |

が得られる。式(3.2.12)は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.13) |

とまとめることができる。ここで、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.14) |
|  | (3.2.15) |

　式(3.2.14)、式(3.2.15)で定義されるマトリックスおよびベクトルの成分は、有限要素毎に計算し、重ね合わせることができる。

　式(3.2.13)が任意の仮想変位について成立することにより次式を得る。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.16) |

一方、変位境界条件式は次式のように表される。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.17) |

式(3.2.16)を拘束条件式(3.2.17)のもとで解くことにより、節点変位を決定することができる。

|  |
| --- |
|  |
| 図3.2.1 変位ベクトルの定義 |

### Total Lagrange法

　時刻0の初期配置を基準とする時刻での内部仮想仕事の式は、式(2.3.8)から、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.18) |

で与えられる。この式におけるGreen-Lagrangeひずみの変分について考える。

　図3.2.1に示すように、時刻から時刻における変位の分解式を

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.19) |

で表されるものとする。また、後に示す非線形有限要素解析の反復法のことを考え、時刻から時刻における反復時の変位増分についても以下のように定義しておく。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.20) |

このとき、Green-Lagrangeひずみは、式(2.2.21)より、

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |  |
|  |  | (3.2.21) |

となる。ここで、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.22) |
|  | (3.2.23) |

とする。ここで、有限要素離散式(3.2.10)を利用すると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.24) |

が得られる（第5章を参照）。は既知なので、の変分は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.25) |

と表せる。ここで、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.26) |
|  | (3.2.27) |

である。

　また、時刻から時刻における第2 Piola-Kirchhoff応力の分解式を

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.28) |

で表されるものとすると、内部仮想仕事式(3.2.18)は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.29) |

と与えられる。ここで、はの線形関数であるので、左辺第1項目はについて非線形になる。一方、左辺第2項目はが既知であるから、のみによってに関して線形であり、右辺第2項も既知である。

　さらに、接線剛性を求めるために、式(3.2.29)を対して、の極限をとり、uに関して2次以上となる項を無視すると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.30) |

となる。ここで、、および

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.31) |

である。さらに、時刻での平衡状態においてを仮定し、式(3.2.27)から、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.32) |

となる。また、式(3.2.31)の右辺は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.33) |

と表せる。したがって、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.34) |

となる。ここで、仮にが4階のテンソルとによって表されるものとすると、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.35) |

より、式(3.2.34)に代入して、離散化すると、

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  | |
|  |  |  |
|  |  | (3.2.36) |

となる。ただし、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.37) |
|  | (3.2.38) |
|  | (3.2.39) |

である。

一方、式(3.2.29)の右辺を離散化すると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.40) |

となる。ただし、は外力を表し、形状関数を用いる(第5章を参照)。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.41) |

また、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.42) |

時刻の等価節点力を表している。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.39) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.7) |

### updated Lagrange法

　時刻の現配置を参照配置とする時刻での内部仮想仕事式は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.43) |

である。ここでは、Green-Lagrangeひずみの変分は式(3.2.25)で表している。一方、時刻の応力は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.44) |

と分解されるものと考えると、内部仮想仕事式(3.2.43)は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.45) |

となる。

　次に、接線剛性を求めるために、の極限をとると、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.46) |

となる。ここで、であり、、および

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.47) |

である。さらに、時刻での平衡状態においてを仮定していることから、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.48) |
|  | (3.2.49) |

となるので、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.52) |

となる。ここで、仮に、が4階のテンソルと変形速度テンソルにより、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.53) |

と表すことができるとしたとき、式(3.2.52)に代入して、離散化すると、

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  | |
|  |  | |
|  |  | (3.2.54) |

となる。ここで、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.55) |
|  | (3.2.56) |
|  | (3.2.57) |

である。

一方、式(3.2.48)の右辺を離散化すると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.58) |

となる。ただし、は外力を表し、形状関数を用いる(第5章を参照)。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.59) |

また、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.8) |

時刻の等価節点力を表している。

### Arbitrary Lagrangian-Eulerian(ALE)法

　上記固体変形解析にはLagrange配置を用いたが、流体解析には通常Euler配置が用いられる。Lagrange配置によれば運動方程式に対流項は現れず、また移動境界も厳密に解析できるが、物質点を追跡していくため変形が極端に進むと配置ひいては要素のもつれを生じてしまう。一方,Euler配置は空間に固定されるので要素のもつれは生じないが、自由表面や移動境界を表しにくく、また対流項は数値解法上の難しさをもたらす。Arbitrary Lagrangian-Eulerian(ALE)法, 原理的には両者の欠点を補い、要素のもつれを生じることがなく大幅な境界移動を取り扱うことができる。

　物質とともに変形する配置を物質配置またはLagrange配置、空間に固定された配置を空間配置またはEuler配置と呼ぶ。これらに対しALE配置とは図3.2.2に示されるように任意の変形をしていく第3の配置である。この図から、ALE配置を用いた配置変換は式(3.2.9)のようになることが分かる。ここで、であると, Lagrange配置となり、であると, Euler配置となる。この観点から、ALEはより一般的な配置であると考えることができる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.9) |

|  |
| --- |
|  |
| 図3.2.2 ALEの運動学 |

上記三種類の座標系と対応し、以下の三種類の変位を定義できる。

・　材料変位（Lagrange変位）:

・　空間変位(Euler変位）：

・　メッシュ変位：

ここでは、メッシュ変位はALE参考座標系はEuler座標系に対する変位を示している。

　図3.2.2示している関係から、材料速度は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.10) |

ここで,**w**はALE参考座標系の物質速度である。この式を少し変形し

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.11) |

となる。この式は移流速度**c**がALE参考座標系下の**w**を空間座標系へのpush-forwardであることが分かる。この事実を利用し、ALE参考座標系下の物質時間微分は以下のようになることが分かる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.12) |

上記の式を使うと、ALEを採用する時の基本方程式は以下である。

・　質量保存則

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.13) |

・運動量保存則

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.14) |

また、Lagrange座標系下の速度系の材料構成式となっており、この式中の物質微分はALE参考座標系へ入れ替える必要がある。

・　構成式

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.15) |

また、材質**k**の変化も時間微分の関数になると、その式も同じように書き換える必要がある。

式(3.2.13)と(3.2.14)の弱形式は以下である：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2.16) |
|  | (3.2.17) |

## Newton-Raphson法

上記で得られた全体剛性マトリクスは非線形であるため、その接線剛性を用い、反復計算手法を利用し解く必要がる。本ソフトでは、もっとも一般的に用いられるNewton-Raphson法を採用している。

|  |
| --- |
|  |
| 図3.3.1 Newton-Raphson法 |

時刻におけるつり合い状態を考えると、時刻での内力ベクトルと外力ベクトルは、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.3.1) |

と書くことができる。通常、有限要素法では運動方程式に対して線形化を行うため、は剛性マトリックスを用いて、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.3.2) |

と書くことができる。ここで、は変位ベクトルである。このとき、式(3.3.1)**エラー! 参照元が見つかりません。**および式(3.3.2)より、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.3.3) |

として解が求められる。しかしながら、非線形問題では繰り返し計算なしでは式(3.3.3)のようなつり合い状態を満足しない。以下では、繰り返し計算を目的とした説明を行う。

　時刻およびでの応力状態がつり合い状態にある場合、時刻からまでのまでの荷重増分と変位増分の関係は、図3.3.1で示すように

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.3.4) |

と書ける。そのため、時刻におけるつり合い状態での解が得られている場合、次の時刻の外力に対する変位は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.3.5) |

となる。このとき、本作業における変位ベクトルに関する定義は次の通りとする。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.3.6) |
|  | (3.3.7) |

ただし、式(3.3.5)を解いただけでは、つり合い状態を満足していない。そこで、式(3.3.5)で得られる反復1回目の変位修正ベクトルをとして変位を更新し、つり合い方程式に代入すると、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.3.8) |
|  | (3.3.9) |

となる。ここで、は残差荷重ベクトルであり、を満足したときにつり合い状態となる。

　さらに、第k回目の反復における変位修正ベクトルは、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.3.10) |
|  | (3.3.11) |
|  | (3.3.12) |

と書くことができる。ここで、第0回目の反復時における値を時刻における収束解、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.3.13) |
|  | (3.3.14) |
|  | (3.3.15) |

と定義する。

　Newton-Raphson法では、残差がなくなるまで式(3.3.9)～式(3.3.14)の手順をくり返し行い、収束会を求める方法である。このとき、接線剛性マトリックスの更新は毎回行うものとする。これは、毎回の更新を行うことで収束解に至るまで反復回数を少なくすることを考慮したためである。

　上記のような非線形方程式の解は、残差荷重ベクトルの各成分がゼロになる時点を収束点としている。しかしながら、数値解析において残差荷重ベクトルがゼロになることはないため、通常はある程度の許容値を持って収束と判定することとしている。Advance/FrontSTRは節点残差力を用いて

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.3.16) |

で収束の判定をしている。ここでは、は外部荷重ベクトルであり、tolは収束判定閾値である。

# 動的解析有限要素法

## 基本方程式

動的問題の運動方程式は以下である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.1.1) |

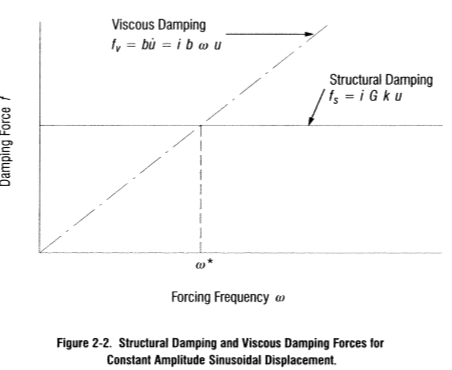
ここでは、**M**と**C**は質量マトリクスと減衰マトリクスである。

### 減衰

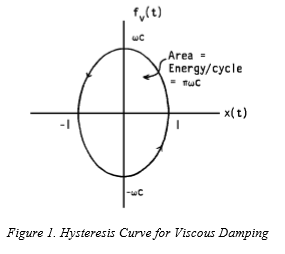
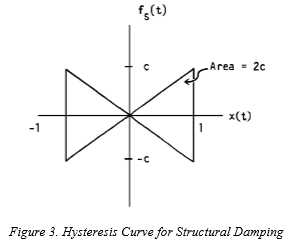
* 粘性減衰・構造減衰

　調和振動状態では、である。

速度と比例する減衰力としてである。ここで減衰係数c=constantの場合は粘性減衰である。; h=constantの場合、減衰力は振動加速度と依存しない、構造減衰である。ここでは構造減衰係数である。ここ時、構造体の見なし剛性でき、複素剛性と呼ぶ。



一周期内、減衰によるエネルギー消耗はである。

(http://www.systemplus.co.jp/support/data/techpaper/mescope/tech/36.pdf)

・　粘性減衰、臨界減衰、減衰比

　粘性減衰主に粘弾性体で生じる減衰で、速度に比例した減衰力を発生する。

　臨界減衰の比例値を示す。

・　レイリー減衰

　レイリー減衰はもともと計算を安定化させるために考案された減衰であり、実際の現象を再現させるためのものではありません。また、パラメータの取り方によっては [C]を対角化させることができるため、モード法や陽解法の計算に都合がよいという理由もあります。いわば解析上の都合だけで定義された**仮想的な減衰**と言えます。

　しかし、モード減衰比が使えない直接法の解析において、着目している周波数範囲の減衰をモード減衰比として大まかに指定できるメリットがあるので多用されます。

レイリー減衰は粘性減衰係数を下式のように表す

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.1.2) |

モード座標系ではが対角マトリクスであり、使いやすいである。その時、方程式(4.1.1)はモードごとに分解できる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.1.3) |

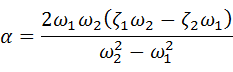
と設定すると、モード合成法の標準式となるので、この式から、減衰比ζiとα、βを下式のように関連つけられる：

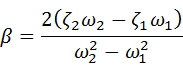
|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.1.4) |

この式から明らかなように、低い周波数ではαが、高い周波数ではβが支配的になるような性質があります。これを使い分けて解析上不要な振動成分をフィルタリングすることができます。

また、ある周波数範囲のモード減衰比を指定したい場合については以下のような手順でαβを同定します。

まず着目している角速度範囲をω1～ω2としたとき、角速度ω1の時のモード減衰比をζ1、角速度ω2の時のモード減衰比をζ2として式(4.1.4)に代入し、これらの式を連立してα、βについて解きますと以下のようになります。





この方法で求めたαβを用いることでω1～ω2の範囲におけるモード減衰比がζ1～ζ2となるように設定することができます。ζ1とζ2に同じ値を用いれば着目範囲でほぼ一定のモード減衰比を設定することができます。ただしこの方法で求めたζの分布は曲線的になるため、必ずしも狙った減衰比を定義できるわけではありません。実際に使う場合には注意が必要です。

・まとめ：本ソフトウェア内の減衰マトリクス

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.1.5) |

βj: 材料減衰；直接時間積分法中、材料の剛性マトリクスにかけるが、モード法中減衰比ζを使う：

βc: 調和振動中使用：構造減衰係数

Cζ: モード法中使用：減衰比

Ck: 要素減衰

・ 粘性境界条件

LysmerとKuhlemeyer[23]が提唱した標準粘性境界条件(standard viscous boundary)は界面法線方向の振動は接線方向へ吸収する境界条件である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.1.6) |
|  | (4.1.7) |

ここでは、**σ**と**τ**は境界面法線方向と接線方向の応力,**u**と**v**は境界面法線方向と接線方向の相対変位、**V**pと**V**sはP波とS波の速度、αpとαsは無次元係数である。一般的にはαp=αs =1.0

### 集中質量マトリクス

1) 　HRZ法

　以下の手順で

・　consistent質量マトリクスを計算する

・　; i=変位自由度；と要素質量mを計算する

・　集中質量マトリクス

## 直接時間積分法

　非線形方程式(4.1.1)をそのままの形で直接時間方向に解き進む手法は直接時間積分法を呼ぶ。本節はこの手法を中心に動的問題の取り扱い方を述べる。

静的問題の場合と同様、内力ベクトルについて線形化を行った次式に基づくNewton-Raphson法の反復計算(k=1,2,3,…)を行う。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2.1) |

ここでは

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2.2) |

ただし右肩符号(k)は第k回目の反復であることを示した。

　上式には未知量がが含まれているため通常は三者を何らかの近似により関係付けることにより、一変数に減らして解析を行う。以下では、Advance/FrontSTRが採用している近似方法をまとめる。

### 中央差分法

　中央差分法は一ステップ陽的解放である。中央差分法は式(4.2.4)に示した時刻tの運動方程式を基にする。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2.3) |

この時、時刻tの速度および加速度は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2.4) |
|  | (4.2.5) |

これらの式を式(4.2.3)に代入し次のように整理する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2.6) |

減衰マトリクスは比例減衰マトリクス

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2.7) |

である場合では、式(4.2.6)は以下に変換する

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2.8) |

これより、集中質量マトリクスを採用する時、左辺( )内が対角マトリクスとなり、連立方程式を解くことなく右辺ベクトルのみの計算のみによって**U**(t+Δt)を求められる。この手法は動的解析の陽解法とも呼ばれる。

　本手法は、いわば外挿によってΔt後の解を評価しているため、運動方程式を解く時間が節約できる反面、Δtを十分小さくとらないと解の安定性が保証されない欠点を併せもっている。

### Newmark-β法

　Newmark-β法では、一ステップ陰的解法である。Newmark-β法は二つのパラメータβとγを用い速度と変位を以下のようにNewton裁断したTaylor級数を表し

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2.9) |
|  | (4.2.10) |

また、加速度を以下のような線形式

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2.11) |

を表すとする。これらの式から、速度と変位を以下のように表すことができる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2.12) |
|  | (4.2.13) |

　ここでは、βとγの選択することより、計算の安定性と数値減衰をコントロールすることができる。γ=0.5の時、数値減衰がなく、γ＞0.5の時、数値減衰が導入される。特に

・　γ=1/2, β=1/4の時、台形加速度法

・　γ=1/2, β=1/6の時、線形加速度法

となっている。

　変位は未知量とする場合では、変位増分から速度と加速度を計算する必要があるが、これが上の式(4.2.12)と式(4.2.13)から得られる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2.14) |
|  | (4.2.15) |

この二式を式(4.2.1)に代入すると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2.16) |

この式をに示したNewton-Raphson法を用いて解くことより、時刻t+Δtの変位が得られ、さらにその変位値を式(4.2.14)および式(4.2.15)に代入し、時刻t+Δtの速度および加速度が得られる。

Newton-Raphson法を応用するため、上式を下記のように書き換える。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2.17) |

Rayleigh減衰を採用した場合

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2.18) |

### Hilber-Hughes-Taylor (HHT) 法

　Newmark-β法が数値減衰を加える時、精度が落ちる。HHT法は数値減衰を加えながら、二次精度が有する方法である。Newmark-β法と同様一ステップ陰的解放である。

　HHT法はNewmark法と同じく式(4.2.12)および式(4.2.13)を利用するが、式(4.2.1)を以下のように修正される。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2.19) |

ここでは

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2.20) |

である。この場合では式(4.2.15)(4.2.16)(4.2.19)(4.2.20)は式(4.2.1)代入すると、以下の式が得られる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2.21) |

と以下のデフォルト―値

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2.22) |

を使うと、HHT法は二次精度を持ち、無条件安定する。また、α値小さいほど、数値減衰は大きくなる。

### Generalized α法

　HHTと似ているが、Genrelized α法は以下の式を解く。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2.23) |

この式から得られる増分方程式は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2.24) |

この方法はの時２次精度を持ち、の時無条件安定である。

### 周波数応答解析

周波数応答解析では定常な調和加振に対する構造側の応答を計算する手法です。調和加振ですので荷重ベクトルを下式のようにおく。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2.25) |

この式を(4.1.1)に代入し、フーリエ変換し、以下の式となり

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2.26) |

結局この問題は以下の線形一次複素数方程式に帰着する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2.27) |

## 固有値解析

　減衰のない自由振動問題の場合、運動方程式(4.1.1)は以下になる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.1) |

ここでは、角速度をωとし、t0を時間定数,**Φ**をベクトルとして、この方程式の解は以下のように仮定できる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.2) |

この式を式(4.3.1)に代入すれば、下記の一般化固有値方程式が得られる。

|  |  |
| --- | --- |
| or | (4.3.3) |

ここではを固有値と呼び、**Φ**を固有ベクトルと呼ぶ。この方程式の特性方程式は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.4) |

であり、その非零解が存在する条件は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.5) |

である。このn次代数方程式は固有値問題(4.3.1)の特徴方程式という、この方程式のn個の根を(4.3.1)に代入すれば、n個の固有ベクトル**Φ**i(i=1,2,...n)も得られる。

**K**は対称と**M**は対称かつ正定マトリクスの場合では、固有値は実数、固有ベクトルは実ベクトルである。本ソフトは実数固有値と固有ベクトルのみ考慮している。

　固有ベクトルはM-直交性をもつ。すなわち

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.6) |

Miはモードiのgeneralized massである。特に、と満足させる固有ベクトル**Φ**iは正規化固有ベクトルと呼ぶ。

### シフト

　式(4.3.4)を以下のように変換できる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.7) |

本ソフトは低次の固有値から高次までの固有値を順次に計算するため、この変換は固有値はσ付近であるの(λi,Φi)を計算するのに有効である。

### モード別有効質量とモード刺激係数

　剛体加速度

(x0,y0.z0)回転中心。各節点にfi= mi(節点番号)j(自由度番号)ajの慣性力をかけることになる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.8) |

両側固有ベクトルをかけ

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.9) |

右辺はモードj

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.10) |

はModal participation factorsという。一方

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.11) |

は有効質量という。

　有効質量が固有モードの重要さを示している。有効質量が大きいモードある剛体加速度の影響を受けやすい。また、モード有効質量の総計値が振動体の質量と同じであるが、すべてのモードを計算するわけでもないので、計算精度を維持ずるため、一般的にモード有効質量の総計値が振動体の質量の90%以上であること要求する。

## モーダル応答解析

　直接積分法は、運動方程式(4.1.1)を直接的に解くのに対し、モーダル法では、式(4.1.1)の解を下式のように固有モードベクトル**U**iより表す。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.1) |

このように得られた各モードの応答を重ね合わせることにより、系の応答を求める。直接法に対し、多くの場合解析時間が圧倒的に短くなるが

・非線形現象は解析できない

・無視されるモードがあり、モードの打ち切り誤差が発生する

と言ったデメリットがある。

### 基礎理論

　まず式(4.1.1)を考える。この方程式をLaplace変換をかける、あるいはその解はと仮定すると、以下の式が得られる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.2) |

ここで、とは初期変位と初期速度である。特に、初期条件は全部ゼロである場合

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.3) |

となり、この方程式はよく

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.4) |

と書き、このH(s)は伝達関数（transfer function）と呼ぶ。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.5) |

この式の分母は特徴方程式と呼ぶ。ここで、は自然振動数(natural frequency),はcritical damping, はdamping ratioと呼ぶ。特徴方程式の根は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.6) |

であるが、減衰Cは小さい場合、二つの根は以下の複素数になる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.7) |

ここははdamping factor, はdamped natural frequencyと呼ぶ。この時、伝達関数は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.8) |

となる。

　また、この方程式をFourier変換かける、あるいは、式(4.4.6)内の変数と仮定すると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.9) |

となる。この式はよく

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.10) |

と表現し、このH(ω)は周波数応答関数FRF(frequency response function)と呼ぶ。

### 過渡応答解析

　過渡応答解析は時刻歴応答解析とも呼ばれ、**時間的に変化する挙動を解析**する手法です。したがって時間軸で解析が実行されます。入力荷重としても時間的に変化する動的な荷重を定義することができますので、実現象に近い状態を解析で再現させるができます。応答としては各節点における変位、速度、加速度、またそれにより生じる要素の応力などが時系列データとして得られます。

　式(4.4.1)を式(4.1.1)に代入すると下式が得られる

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.11) |

この式の両側に**U**iをかけると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.12) |

が得られる。ここで、固有モードベクトル**U**iの定義

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.13) |

を用いた。さらに、固有モードの直交性を利用し、式(4.4.12)を各モードまで分解でき、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.14) |

が得られ、この式からbi(t)が得られ、このbiは式(4.4.1)を代入すると式(4.1.1)の解が得られる。また、式(4.4.14)は定数係数線形二次非斉次常微分方程式であり、この方程式の初期条件は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.15) |

に対する解は時間に対する積分より得られる。

subcritial

=(()

critial

supercritial

* 構造減衰の処理方法

構造減衰が複素剛性を導入するため、周波数応答解析のような複素数解の問題に対して問題なく使用できるが、過渡応答解析には直接応用できない。

1自由度の問題を考える：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.16) |

質量に対する正規化

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.17) |

調和振動状態では

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.18) |

もうし, 粘性減衰cは構造減衰と同じ効果を出すことができることがわかる。特にの時、。

一般的な状況では

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.19) |

固有モード空間では

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.20) |

も対角化できる場合ではなので. 粘性減衰cは構造減衰と同じ効果を出すことができる。また、が対角化できない場合では

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.21) |

Ref: On the equivalent viscous damping for systems with hysteresis

### 周波数応答解析

周波数応答解析は単純な正弦波の入力に対する定常的な応答を求める解析手法です。通常は一つの周波数だけでなく、ある周波数範囲に対し、ある周波数刻みで解析し、全体的な応答の特性を把握するのに用いられます。入力を与える手段としては、一般的な荷重の他、強制運動(変位、速度、加速度)で与えることができます(強制運動に対応していないソルバーもあります)。応答としては各節点における変位、速度、加速度、またそれにより生じる要素の応力などを評価することができます。

周波数応答解析では定常な調和加振に対する構造側の応答を計算する手法です。調和加振ですので荷重ベクトルを下式のようにおく。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.22) |

ここでは、**F**Rと**F**Iはそれぞれ同位相と反位相荷重の振幅であり、Ωは加振周波数である。この式を(4.4.5)に代入すると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.23) |

が得られる。ここでは、cjはモードjに対するdamping係数であり、本ソフトは以下のケースを考慮している：

・粘性減衰主に粘弾性体で生じる減衰で、速度に比例した減衰力を発生する。

この時. ξjは臨界減衰係数に対する減衰比である。

・構造減衰は**ヒステリシス減衰**とも呼ばれ、変位に比例した(あるいは剛性に比例した)減衰力を発生する。 この時

・レイリー減衰はもともと計算を安定化させるために考案された減衰である。

この時

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.24) |

この荷重による応答も調和関数になることが考えられますので、biを下式のように置く。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.25) |

この式を(4.4.23)に代入し

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.26) |

が得られる。この式の実数と虚数部まで分解すると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.27) |

が得られ、その解は以下である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.28) |

この結果は式(4.4.25)に代入すれば解が得られるが、その振幅はであり、位相である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.29) |

1. **Rayleigh 減衰**

n x n 対称減衰マトリックス [C] は質量 [M] と剛性 [K] のマトリックスの線形結合として定式化されています:

 (関係式 1)

* アルファ係数 質量比例係数 α を設定します。
* ベータ係数（Beta Coefficient）: 剛性比例係数 β を設定します。

(関係式 1) にある減衰タイプは Rayleigh （レイリー）減衰または比例減衰と呼ばれます。

[C] はシステム固有ベクトルに対して直交になります。

モーダル座標変換を適用することにより、モーダル減衰マトリックス [c] が対角になります:

 (関係式 2)

Rayleigh 減衰は線形動解析スタディと非線形動解析スタディで定義できます。

1. **Rayleigh 係数とモーダル減衰比の関係（Relation of Rayleigh Coefficients and Modal Damping Ratio）**

モーダル減衰行列 [c] は次により与えられます:

 (関係式 3)

i 次モードの粘性減衰係数 ci は次によって計算されます:

 (関係式 4)

および粘性減衰比 ζi は次のように表されます。

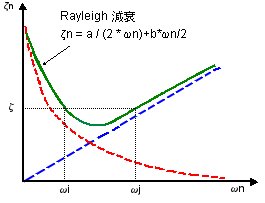
 (関係式 5)

i 次モードと j 次モードの減衰比が ζi と ζj の場合、Rayleigh 係数 α と β は 2 つの代数方程式の解法から計算されます:

 (関係式 6)

両方のモードの減衰比が同じである場合（ζi = ζj = ζ）、α と β の値は次により与えられます。

 （関係式 7）  （関係式 8）

他のモードの粘性減衰比 ζ は次の図にあるように振動数によって異なります:  


## 慣性リリーフ解析(Inertia Relief Analysis)

拘束なしの加速状況下の構造物に仮想d’Alembert力をかけ、慣性系座標系に解析を行う。この時、この構造物は準静的変形（ある参照点の変位がゼロ）と見なすことができる。

　変位を剛体変位成分と参照点との相対変位**u**と分解する

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.5.1) |

その時の動的つり合い式は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.5.2) |

である。ここでである。また、相対加速度は剛体加速度と比べ十分小さいと仮定しである。そこで式(4.5.2)は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.5.3) |

と変換される。

　任意一点(x,y,z)の剛体変位成分は参照点(x0,y0,z0)の変位成分より表すことができる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.5.4) |

ここでは変換マトリクスTは剛体モードを示している。

外力Fをかける時の剛体変位加速度は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.5.5) |

を求められる。この式を式(4.5.3)に代入すると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.5.6) |

となり、相対変位**u**を計算することができる。ここではは慣性リリーフ荷重である。しかし、拘束不足の場合ではKはであり、その逆行列が存在しない。ここで、剛体モードTは固有モードと直交する条件を利用し、式(4.5.3)と(4.5.5)と組み合わせ下式が得られる：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.5.7) |

この式から剛体加速度と変形量が同時に解ける。しかし、この方法では全体剛性マトリクスの構造は変わり、不便である。そこで以下の手順で計算を行う：

1. 式(4.5.5)を用い、外力Fかけた時、参照点の加速度を計算する。
2. 参照点を拘束し、式(4.5.6)を解く。
3. 重心点を拘束し、静解析を行い、拘束点反力を求める  
   ②重心点を拘束したまま回転加速度をかけ反力を求める  
   ③重心点を拘束し、並進加速度をかける  
   ④荷重ケース①～③の拘束点反力がキャンセルされて0になるよう②と③の倍率を定め、全荷重ケースの線形和を求める

回転自由度を考慮しない時

# 材料ライブラリ

## 線形弾性材料

変形に伴うひずみと回転が微小であることを前提とした微小ひずみ理論に基づいた弾性構成式について説明を行う。ここでは、変形体の参照配置、現配置などの区別が必要がなく、応力とひずみの定義も特に意識する必要がなく用いている。

　線形弾性材料における応力－ひずみ則は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1.1) |

で与えられる。ここで、は4階の接線係数であり、温度に依存する可能性があるが、変形状態などに依存しない材料常数を表している。**σ**はCauchy応力であり、**ε**は(3.2.7)で与えられた微小変形ひずみ、または工学ひずみと呼ばれる線形なひずみである。一般的な場合では、は21個の成分を持つが、対称性によりその数は減る。

### 等方性線弾性材

等方性を持つ線弾性材はラ―メの定数λ, μより次のように表現できる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1.2) |

また、Lamé定数は、よく知られている物理量のbulk係数、Young率、Poisson比を用いて

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1.3) |

と表すことができる。

　線形弾性材料の使用前提は変形に伴うひずみと回転が微小であることであり、これか幾何非線形仮想仕事式(3.2.17)と対応する。そのため、線形弾性材料を利用し、幾何非線形を考慮する解析を指定すると矛盾が生じることになる。その時、Advance/FrontSTRはユーザーから入力した線弾性係数を利用し、式(4.1.1)を以下のように書き換えり、幾何非線形を考慮した解析を行う。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1.4) |

この時、式(4.1.4)から得られる材料接線係数**D**は変形状態の関数になり、超弾性材料の一つにSt. Venant-Kirchhoff超弾性モデルになる。

### 直交性線弾性材

直交性を持つ線弾性材の構成式は以下である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1.5) |

また、ν12E2=ν21E1, ν13E3=ν31E1, ν23E3=ν32E2

## 超弾性材料

超弾性（hyperelastic）材料とは、材料の力学状態は現配置のみに決まられる材料であり、数学的には、弾性ポテンシャル関数=を持つ材料である。このポテンシャル関数の時間微分をとると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.1) |

となる。この式は変形エネルギー**S:E**と利用したが、ここから

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.2) |

まで変換すると、は任意である場合**、**応力はそのポテンシャルを変形やひずみの成分によって微分されることにより求められることはわかる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.3) |

ここで、は弾性ポテンシャルである。弾性ポテンシャルがGreen-Lagrangeひずみの関数として表されるとき、その弾性ポテンシャルはで表されるものとする。このときの2つのスカラー量の関係はとなる。超弾性材料がする仕事は変形経路に対して独立なものであり、これは弾性ポテンシャル関数が存在することを示している。このような挙動は多くのゴム材料の挙動と似たものである。変形経路に対する仕事の独立性は、変形状態からにおける参照する単位体積当たりの弾性エネルギーを考慮したものである。このことは、第2 Piola-Kirchhoff応力テンソルとGreen-Lagrangeひずみは共役な関係であることから、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.4) |

と与えられることになる。そして、材料に蓄えられたエネルギーは初期の状態と最終変形状態にのみ依存するものであり、変形経路（荷重経路）に対しては独立である。

　超弾性材の変形は変形履歴に依存せず,その構成式は第2 Piola-Kirchhoff応力テンソルを利用しているため、 Advance/FrontSTRは3.2.2節に示したTotal Lagrange法を用い解析を行う。

1)　等方性を持つ超弾性材料

　超弾性材料における弾性ポテンシャルエネルギーは、応力の作用していない初期状態からの等方性を持った応答から得られるものであり、右Cauchy-Green変形テンソルの主不変量、または体積変化成分を除いた右Cauchy-Green変形テンソルのの主不変量関数（つまり、あるいは）として表すことができる。このとき、2階のテンソルの主不変量やそれらの導関数は弾性構成式や弾塑性構成式を表すためによく用いられることから、これらの数学的な表記について以下に示す。

　2階のテンソルの主不変量は、以下の式で与えられる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.5) |
|  | (5.2.6) |
|  | (5.2.7) |

が文章中で自明であるとき、と省略する場合もある。ここで、がという対称性を持つなら、は3つの実固有値（主値）を持ち、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.8) |
|  | (5.2.9) |
|  | (5.2.10) |

となる。

　超弾性材料の第2 Piola-Kirchhoff応力テンソルが式(5.2.3)より与えられ、その接線剛性は以下になる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.11) |

2) 非圧縮性超弾性材料

　非圧縮性の場合では、J=1であるため, となり、式(5.2.2)中のは任意ではない。条件を考慮し、式(5.2.2)は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.12) |

となる。ここでは、λはLgarange未定係数であり、物理では静水圧力と解釈できる。

　以下では、Advance/FrontSTR内に実装した超弾性モデルを列挙する。

### 多項式超弾性モデル

　弾性ポテンシャル関数を多項式で表し、そのもっとも一般的な式は以下になる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.10) |

ここで、とDiは材料定数であり、Jは変形Jacobianである。この式は体積変化を除いた変形エネルギーと体積変化エネルギーを分けて表し、解析上には便利である。特に材料定数Diは十分小さい場合には、材料の非圧縮性を近似に表すことができる。ただし、本ソフトは完全非圧縮性材料(Di=0)を取り扱いことができない。

その弾性構成式は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.11) |

であり、その接線構成式は以下である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.12) |

### 低減多項式超弾性モデル

　低減多項式超弾性モデルは多項式超弾性モデルの一種である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.13) |

### Neo-Hookean超弾性モデル

　Neo-Hookean超弾性モデルは等方性を持つ線形則（Hooke則）を大変形問題へ対応できるように拡張したものである。その弾性ポテンシャルは以下である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2.14) |

このモデルも多項式超弾性モデルの一種である。

### Mooney-Rivlin超弾性モデル

Mooney and Rivlin超弾性モデルの弾性ポテンシャル関数は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.15) |

である。このモデルも多項式超弾性モデルの一種である。

### Yeoh超弾性モデル

　Yeoh超弾性モデルの弾性ポテンシャル関数は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.16) |

である。このモデルも多項式超弾性モデルの一種である。

### Arruda-Boyce超弾性モデル

　Arruda-Boyce超弾性モデルの弾性ポテンシャル関数は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.17) |

となる。多項式超弾性モデル材と同じく、ここでは弾性ポテンシャル関数は体積変化を除いた変形エネルギーと体積変化エネルギーを分けて表す。

　Arruda-Boyceの弾性構成式は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.18) |

であり、その接線構成式は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.19) |

である。

### Ogden超弾性モデル

　Ogden材の弾性ポテンシャルは以下である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.20) |

ここではは変形主軸方向の伸び量であり、偏差主軸方向伸びと呼ばれる。特にN=1, の時、(4.2.14)のNeo-Hookean超弾性モデルとなり、N = 2, α1 = 2, and α2 = -2の時、(4.1.15)のMooney-Rivlin超弾性モデルとなる。

Ogdenの弾性構成式は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.21) |

であり、その接線構成式は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.22) |

である。

### 発泡超弾性体モデル

　 以下のモデルは、圧縮性の高い泡状物質の超弾性の性質を表す。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.23) |

ここでは、は材質である。は以下のようにPoisson比と関連付ける。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.24) |

発泡超弾性モデルの弾性構成式は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.25) |

であり、その接線構成式は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.26) |

である。

### St. Venant-Kirchhoff超弾性モデル

　このモデルは線弾性構成式の直接拡張であり、その詳細は式(4.1.4)に示している。

## 弾塑性材料

　弾塑性材料の特徴は以下の通りである。

1. 弾性領域が存在する。
2. 物体内の応力は一定値(降伏応力)を超えると、不可逆の塑性ひずみが生じる。
3. 塑性ひずみの発展と伴い、降伏応力も変化する。これを硬化現象と呼ぶ。

弾塑性変形解析にあたって、まず降伏が始まると考えられる応力状態を規定する降伏条件が必要になる。また降伏が生じたのちの挙動を記述する塑性流動の法則が必要になり、硬化現象を記述する法則が必要になる。

弾塑性変形は金属や土などよく現る現象である。

弾塑性変形挙動は変形履歴に依存し, Advance/FrontSTRは3.2.3節に示したupdated Lagrange法を用い解析を行う。

### 亜弾性－塑性材料モデル

亜弾性－塑性モデルは、弾性ひずみが塑性ひずみと比較して小さい場合に用いられる。このような問題において構成モデルは変形速度テンソルを弾性成分と塑性成分に加算分解し、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.3.1) |

と定義する。上記の仮定を採用すると、弾性応力とひずみの関係は弾性ポテンシャル関数より得られなくなり、物理的に望ましくないという指摘がある[9]が、弾性ひずみが十分小さい場合では、これを無視することができる。

　以下では、Cauchy応力のJaumann速度を主とした構成関係を中心に展開する。弾性部分の構成関係には亜弾性構成式

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.3.2) |

を適用する。また、塑性流れに関する塑性の変形速度テンソルは、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.3.3) |

として与えられる。ここで、は塑性率パラメータ（plastic rate parameter）でありは内部変数である。は塑性流れの方向を示し、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.3.4) |

で与えられる。ここで、は塑性ポテンシャル（plastic flow potential）である。この塑性流れの方向はCauchy応力と内部変数に依存する。例えば、スカラー量の内部変数は有効塑性ひずみ（もしくは相当塑性ひずみ）（effective [equivalent] plastic strain）から構成される。幾何学的な効果モデルにおける背応力（back stress）も2階のテンソルで表記される内部変数である。ただし、この節では背応力の存在を考慮せず、内部変数はスカラー量の集合としている。ここでは、塑性ポテンシャルは降伏関数(式(5.3.6))と同じである場合では、式(5.3.4)は関連流れ則と呼ぶ。

　内部変数に対する発展方程式は、塑性モデルの場合、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.3.5) |

で表される。ここで、は考慮した内部関数の数である。塑性パラメータに対する降伏条件

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.3.6) |

を用いて、さらにKuhn-Tuckerの負荷・除荷条件

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.3.7) |

より導かれる(式(5.3.10)を参照)。

塑性負荷状態における応力は降伏面に残っており、式(5.3.6)の適合条件の客観速度ゼロであることにあたる。そして、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.3.8) |

が得られる。

　さらに、式(5.3.8)の中に亜弾性材料の構成関係式(5.3.2と塑性流れ関係式 (5.3.3)、発展方程式(5.3.5)を適用すると、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.3.9) |

となることから、塑性率パラメータは、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.3.10) |

となる。

　式(5.3.2)に式(5.3.10)を代入すると、Cauchy応力のJaumann速度と全変形速度テンソルの関係式より、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.3.11) |

が得られる。ここで、4階のテンソルは亜弾塑性接線係数（elasto-plastic tangent modulus）である。さらに、式(5.3.11)を整理すると、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.3.12) |

となる。

　ここで得られた弾塑性構成式はUpdated Lagrange法用仮想仕事式(3.2.73)に代入すれば、有限要素法定式化は完成される。まず、Tuesdell応力速度との関係は式(2.2.56)および式(2.2.62)から得られる、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.3.13) |

しかし、の存在より、この式は(3.2.45)に代入し、得られる要素剛性マトリクスは非対称になり、計算コストがかかることになる。そこで、塑性変形における非圧縮性()と微小弾性ひずみの仮定からこの項は無視し得る程度と考えられるので、式(5.3.13)は以下のように変換する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.3.14) |

　一方、ダイレイタンシー材料や浸透性のある塑性材料に対する適用においては、無視できないほど大きなダイレイタンシー（体積変化）が塑性変形に伴って発生し、の仮定が成立しなくなるが、このような弾塑性材の解析はAdvance/FrontSTRは対応していない。

### 移動硬化則への拡張

　サイクリックな荷重を考える上で、等方性硬化モデルでは、金属材料の応力-ひずみ挙動を満足に表現できない。例えば、図4.3.1の示したサイクリックな塑性材料はBauschinger効果として知られた挙動を示す。これは圧縮時の降伏ストレッチが引張り時の初期降伏状態に関連して減少する挙動である。これは降伏面の中心が塑性流れの方向に移動するものと考えている。

図4.3.1(b)では多軸系での応力状態を示している。円形の降伏面の拡張（伸び縮み）を考えることを等方硬化と呼び、降伏面中心の移動を考えることを移動効果と呼ぶこととする。移動硬化モデルは、通常の塑性モデルの他に内部変数として背応力（back stress）テンソルを用い, 背応力は降伏面の中心を指し、その背応力の変化は降伏面中心の移動を記述する。

|  |
| --- |
| D:\job_advance\post革新\report\Theory\figure\kinematic-hardening.gif |
| 図5.3.1 等方性材料の移動硬化則の概念図 (a)Bauschinger効果 (b)降伏面の移動と拡大 |

　背応力が存在する時、式(4.3.3)は以下のように書き換える。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.15) |
|  | (4.3.16) |

ここで、は移動硬化係数である。この時、適合条件から求めた塑性速度パラメータは、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.17) |

となる。

　応力速度－全変形速度関係

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.18) |

であり、連続な弾塑性接線係数は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.19) |

となる。

### 応力更新アルゴリズム

#### Cauchy応力の更新計算

　変形増分量が分かると、式(4.3.11)からCauchy応力のJaumman増分を計算することができる。これからCauchy応力の物質増分を計算し、増分後のCauchy応力を計算する。

Cauchy応力のJaumman速度と物質速度の関係は式(2.2.56)に示している。この式からスピンテンソル**w**を利用し、Cauchy応力の物質増分を計算できるが、スピンテンソル**w** は増分量の線形関数ではなく、その増分量が大きくなるとその計算誤差が大きい。本ソフトでは、相対的に計算誤差の小さいHughes-Winget回転マトリクスを用い、Cauchy応力の物質増分の計算を行っている。

Hughes-Wingetアルゴリズムは有限変形を有する速度形の構成式を以下のように計算する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.28) |
|  | (4.3.29) |

ここではは背応力であり、テンソル**R**は以下のような中央積分法を用い計算する。

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  | (4.3.30) |

　また応力およびひずみ増分は以下を用い計算する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.31) |

#### 後退型Euler積分（radial return法）

　式(4.3.31)に示した応力増分計算式は前進型Euler積分法であり、これの用いアップデートされた応力や内部変数は次ステップでの降伏条件を満足せず、つまり、である。速度依存型塑性材料に対してこの方法を用いることは、近年の数値解析分野の主流から外れつつある。

前述の方法に代わるものとして、時間ステップの最後に降伏面から解が飛び出すことを回避する方法であり、である。このような方法はradial return法と呼ばれ、解の精度が良いため、近年の有限要素法においては積極的に使用されている。

　後退型Euler積分において塑性ひずみ増分と内部変数の増分は、現ステップ内を繰り返し計算した際の最後の状態において降伏条件がとなっていることが前提条件にある。つまり、応力・ひずみなどの積分方法は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.32) |
|  | (4.3.33) |
|  | (4.3.34) |
|  | (4.3.35) |
|  | (4.3.36) |

とする。ここで、時刻における応力・ひずみのセットをで与えている。式(4.3.32)～式(4.3.36)では、時刻 におけるひずみ等をとしている。つまり、前時間ステップにおける収束値に対する更新を行う。

|  |
| --- |
| D:\job_advance\post革新\report\Theory\figure\ReturnMapping.gif |
| 図4.3.2 関連流れ則におけるreturn mappingの概念図 |

　このアルゴリズムにおける幾何学的な解釈を以下に示す。初めに式(4.3.33)に対して塑性ひずみ増分は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.37) |

で与えられるものとすると、式(4.3.35)は、

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | (4.3.38) |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

となる。ここで、は弾性予測子（elastic predictor）の試行応力（trial stress）であり、はplastic correctorである。Plastic correctorは図4.3.2で示すように、降伏面を飛び出している試行応力（つまり、）を塑性流れ方向を用いて適切な降伏面上に試行応力を導くために用いられる。Elastic predictorは全ひずみ増分から得られ、plastic correctorは塑性パラメータの増分から得られる。つまり、elastic predictorを用いているときには、塑性ひずみと内部変数は固定されており、plastic correctorを用いているときには、全ひずみが固定されている。以上のことから、plastic correctorを用いている場合の応力増分は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.39) |

となる。

　上記closet point projectionの概念に基づいた降伏面に引き戻すためのplastic correctorは式(4.3.32)～式(4.3.36)で示される非線形代数方程式の解はNewtonの反復解法を行うことで求めることができる。Plastic correctorに関するアルゴリズムでは、全ひずみは一定であり、非線形な代数方程式の線形化は塑性パラメータの増分に関して行われる。そのため、を関数とする線形化された式を目的関数とするNewtonの反復解法を行うこととなる。反復回数が回目のときは、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.40) |

となる。ここで、は反復回数回目におけるの増分量を意味する。

　塑性状態の更新と降伏条件を前述した式(4.3.40)に対して適用すると、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.41) |
|  | (4.3.42) |
|  | (4.3.42) |

となり、これらの式に対してを用いて線形化すると、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.43) |
|  | (4.3.44) |
|  | (4.3.45) |

となる。ここで、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.46) |
|  | (4.3.47) |

となる。式(4.3.43)と式(4.3.44)を式(4.3.46)と式(4.3.47)に代入すると、以下に示すマトリックス形式の方程式が得られる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.48) |

ここで、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.49) |

である。応力増分と内部変数増分に対する解は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.50) |

となる。式(4.3.45)からの解は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.51) |

となる。ここで、である。

　以上のことから塑性ひずみ、内部変数および塑性パラメータの更新は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.52) |
|  | (4.3.53) |
|  | (4.3.54) |

となる。そして、更新された降伏面上に十分な収束精度を保持した状態の応力状態となるまで、Newtonの反復法を繰り返す。

### Consistent接線係数

　陰解法においてできる限り正確に近似された接線を求めることの必要性は、降伏状態の塑性挙動が極端に大きくなるようなときに効果があり、弾塑性接線係数が擬似的な負荷もしくは除荷状態に陥ることを回避できることで、安定した解を求めることができる点にある。ここでは、弾塑性接線係数として用いることのできる積分アルゴリズムの対称な線形化に基づくconsistent接線係数について説明する。この議論では、前述した後退型Euler積分によるアルゴリズムを前提条件として成り立っていることに注意が必要である。

　後退型Euler積分における更新手続きにおいてconsistent接線係数は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.55) |

で定義される。このconsistent接線係数で用いている表記方法は、式(4.3.32)～式(4.3.36)における増分形式に従っており、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.56) |
|  | (4.3.57) |
|  | (4.3.58) |
|  | (4.3.59) |

となる。ここで、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.60) |

である。式(4.3.56)に式(4.3.57)を代入すると、とに対する解は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.61) |

となる。ここで、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.62) |

である。さらに、とするとき、適合条件の増分式(4.3.59)を式(4.3.61)に代入することで、の解は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.63) |

で与えられる。この結果、応力や内部変数の増分に関するconsistent接線係数は、式(4.3.61)より、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.64) |

となる。

　関連流れ則、つまり塑性流れの方向と塑性係数が同一のポテンシャル（つまり、かつ）を採用した場合、は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.65) |

で与えられる。ここで、とである。式(4.3.64)を用いてconsistent接線係数を求めると、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.66) |

となる。

### 降伏関数

　この節では、Advance/FrontSTRで採用した降伏関数をまとめる。

#### Von-Mises降伏モデル

　von-Mises規準は偏差不変量から成るJ2応力がクリティカルな値に達したときに塑性降伏したものとして考える。この条件は数学的には次式で表される。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.67) |

ここで、はクリティカルな値であり、内部硬化変数qに関する関数である。ここで、静水圧力応力がvon-Mises規準の降伏条件に影響を与えるのではなく、偏差応力のみによって塑性降伏条件が決まることに注意しなければならない。つまり、von-Mises規準は圧力非依存性の材料である。

　背応力**α**の存在を考慮し、von-Mises塑性体の降伏関数は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.72) |

になる。ここでは、はmises有効応力と呼ぶ。は降伏応力、は初期降伏応力、は相当塑性ひずみである。は偏差応力であり、Cauchy応力の等方応力をとすると、偏差応力は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.73) |

である。また、は材料のひずみ硬化を示しており、Advance/FrontSTRは線形硬化式、多直線近似硬化式及び以下のSwift式

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.74) |

およびRamberg-Osgoodの式

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.75) |

から塑性硬化係数を求める。

また、背応力**α**の発展方程式は以下になる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.76) |

こで、は移動硬化係数である。

上記の降伏関数を用い、材料が弾性挙動を示す場合はとなり、材料が弾塑性挙動を示す場合はとなる。弾塑性状態でのKirchhoff応力はvon-Misesの等価応力が現在の降伏応力に等しくなっている。

#### Mohr-Coulomb降伏モデル

　砂や岩のような摩擦性材料やダイレイタンシー効果に対する考慮が必要な材料では、J2流れ則から成る材料モデルでは現象を十分に表現できない。そのため、摩擦性挙動を示す降伏関数が必要になる。そこで、圧力依存性のないVon-Mises塑性体と圧力依存性のある塑性体を比較しながら説明を行う。さらに、このような摩擦性材料が関連流れ則では必ずしも挙動を近似できるものではないことを示す。図4.3.3では摩擦挙動を示すブロックを考えている。このとき、法線方向の荷重をとし、接線方向の荷重をとする。静的な摩擦係数を持つ粗い表面上でブロックが静止している。Coulomb則が保持されているとすると、最大摩擦抵抗はで与えられる。そして、すべりが発生したときに、降伏条件を満足したものと考えると、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.77) |

となる。降伏面(4.3.77)を図4.3.4で示す。このとき、すべり（塑性流れ）の方向は水平方向（の方向）であり、降伏面の法線方向ではない。これはこの塑性挙動が非関連流れ則の性質を持っていることを示している。Mohr-Coulomb規準はこのような挙動に対する多軸の応力－ひずみ関係を一般化したものである。

|  |
| --- |
| C:\Documents and Settings\ksato.AKASAKA\デスクトップ\friction_mode.gif |
| 図4.3.3 摩擦すべりに対する降伏面 |

　このMohr-Coulomb規準は、せん断応力とmean normal応力で示される応力状態が任意平面に到達した時点で、材料が降伏状態にあることを基本概念とした降伏規準である。このときの規準は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.78) |

という状態にある。ここで、はせん断応力であり、は平面上の法線方向の応力、は粘着力である。内部摩擦角はで定義される。これを主応力表示すると、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.79) |

となる。この式は降伏状態あるいは破壊が最大主応力と最小主応力で規定され、中間主応力がそれらに関与しないことを意味する。この式を応力不変量で表記する。ただし、に関しるLode角を用いる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.80) |

とする。すると、応力不変量表示のMohr-Coulomb式が、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.81) |

となる。このとき、である。

　式(4.3.79)と式(4.3.81)はπ平面上で直線となる。主応力の大きさの組み合わせを変化させると、Mohr-Coulomb式はπ平面上で図4.3.4(b)に示すように六角形となる。

|  |
| --- |
| ( a )D:\job_advance\post革新\report\Theory\figure\mohr-coulomb_pq.gif |
| ( b )D:\job_advance\post革新\report\Theory\figure\mohr-coulomb.gif |
| 図4.3.4 Mohr-Coulomb降伏モデル  (a) Mohr-Coulombモデルの挙動 (b) Mohr-Coulomb降伏面 |

#### Drucker-Prager降伏モデル

　Drucker-Prager降伏規準では、圧力の影響を表すために、von-Mises降伏規準に修正を加えて、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.82) |

とした。これは滑らかな円すい形をした降伏面になっている。ここで、式(4.3.82)の中のは式(4.3.82)に示されるvon-Misesの有効応力(ただし、背応力**α**=0)

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.83) |

である。とはそれぞれ摩擦角と粘着力であり、Mohr-Coulomb材の摩擦角と粘着力cから以下のように近似的換算できる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.84) |

この時、Drucker-Prager降伏面はMohr-Coulomb降伏面の内側面もしくは外側面を通る。ここで、式(4.3.84)中の符号に関して、内側面の場合は符号が正、外側面の場合は符号が負となる。

　弾性応答にはCauchy応力のJaumann速度を基にした亜弾性構成式がよく用いられる。また、関連型と非関連型両方の定式化ができる。関連流れ則ではであり、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.85) |

となる。しかし、関連流れ則を採用する時、体積の膨張はしばしば過大評価する。その時、以下の非関連流れ則を採用し、この問題を回避する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.86) |

ここではは膨張角と呼ばれる。

#### Hill降伏モデル

1) Definition

The Hill1948 (R. Hill. (1948). *A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals.* Proc. Roy. Soc. London, 193:281–297) yield function gives

|  |  |
| --- | --- |
| = | (4.3.87) |

Where is an arbitrary constant which is introduced to make it looks like a particular case of von Mises criterion.

If the axes of material anisotropy are assumed to be orthogonal, we can write

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.88) |

Where are normal yield stresses with respect to the axes of anisotropy, Therefore, we have

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.89) |

Similarly

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.90) |

If

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.91) |

Then the yield function (4.3.87) becomes

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.92) |

, which recovers the standard von Mises criterion.

One important feature of the Hill criterion is that it is pressure insensitive because

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

This allows us to express its yield function in terms of the component of the stress deviator **s**, only.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.93) |

2) Flow rule

For this function

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.94) |

In addition

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.95) |

Flow rule

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.96) |

Because the matrix is singular, the matrix form is rewritten as

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.97) |

Which obtains

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.98) |

Where are arbitrary constants.

3) Equivalent strain definition

The equivalent strain is defined in the equation

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.99) |

Therefore

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.100) |

And

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.101) |

Therefore

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.102) |

IF , then

By another way, inversion of (4.3.96) could be written as

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.103) |

It is therefore

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.104) |

5) Constitutive equation

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.105) |

The consistency condition reads

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.106) |

The plastic strain increment then would be

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.107) |

The stress increment can then calculataed by

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.108) |

After multiplication of both sides of anove equation and introduce (4.3.106)

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.108) |

The constitutive equation is therefore

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.109) |

6) Return mapping algorithm

Consider kinematic hardening also, the yield function becomes

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.110) |

On differentiation of F it will be found that

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.111) |

Using the above, the plastic strain are given by (4.3.96) and kinematic hardening is taken as

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.112) |

The consistency condition then becomes

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.113) |

・　Calculate try stress

・

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3.114) |

Reference:

1. Tatsuya Yamashita: [Analysis of anisotropic material](https://etd.ohiolink.edu/!etd.send_file?accession=ohiou1177700236&disposition=inline), Ohio university, 1996

2. R.B. Colby: [Equivalent plastic strain for the Hill’s yield criterion under general three-dimensional loading](https://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/83690/863164511-MIT.pdf?sequence=2), MIT 2013

3. Jacques Besson et al: Non-Linear Mechanics of Materials: Springer, 2010

## 粘性材料

運動している物体の内部に速度勾配がある場合に，速度を一様にするような向きの接線応力が現れる性質．粘性は液体状態または固体状態で物質の内部摩擦（internal friction）で，主として組成や温度の関数である。

粘性は連続体の変形速率依存性を表す性質である。粘性率ηは以下のように応力とひずみの関係を表す。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.1) |

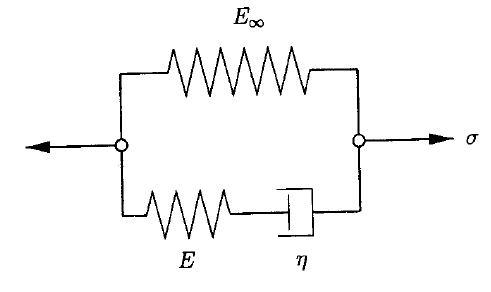
粘性モデルの記号は図4.4.1に示している。

|  |
| --- |
| http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/7e/Dashpot_Symbol.svg/500px-Dashpot_Symbol.svg.png |
| 図4.4.1 粘性モデル記号 |

粘性だけの性質を持つ材料は流体であるが、damping現象を便利に表すため、本ソフトウェアはdapshpot要素を導入している。Dashpot要素は一次元要素であり、両節点間の相対速度および角速度と外力の関係を表す。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4.2) |

## 粘弾性材料



Upon introducing the constants

(initial modulus)

(relaxation time)

Where the internal variable α (i.e. the visco strain) satisfies the evolution equation

This equation admits the integeration factor exp(t/τ), in terms of which it becomes

Integrating this expression and using the boundary condition above yields

Which, integrated by part, reduces to

Finally,

With

### 粘弾性材料の性質

粘弾性(viscoelasticity)とはとは変形体内の応力がひずみ速度を依存するという粘性性質と外力がなくなると最終的に変形体内のひずみがなくなるという弾性の性質両方をあわせた性質のことである。しかし、弾性変形と違って、粘弾性過程はエネルギーが消耗する。図 5.5.1はサイクル荷重を加えた時の応力－ひずみ曲線を示しているが、この曲線が囲んだ面積は消耗したエネルギーを示している。

|  |
| --- |
| σ  ε |

|  |
| --- |
| 図 5.5.1 粘弾性変形ヒステリシス曲線 |

生体材料の多くやプラスチックなどの高分子物質がこの粘弾性体に該当する。

もっとも簡単な粘弾性モデル図5.5.1に示したようにバネとダッシュポットを一つずつ並ぶものであり、それぞれKelvin-VoigtおよびMaxwellモデルと呼ぶ。

|  |
| --- |
|  |

|  |
| --- |
| 図 5.5.2 MaxwellおよびKelvin-Voigt粘弾性モデル |

#### Maxwellモデル

　Maxwellモデルでは、バネとダッシュポットが受ける応力は同じであり、全ひずみはその和になる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.1) |
|  | (5.5.2) |

ここでは、ηとEは粘度とヤング率を示している。

Maxwell材は瞬間的なひずみを与えると、図 5.5.3 応力緩和現象に示したように、応力は時間とともに減衰し、最後ゼロになる。これは「応力緩和」現象である。一方、Maxwell材は瞬間的なひずみを受けると、瞬間的弾性変形を行い、その後ダッシュポットの変形は主導になり、時間とともにの応力がゼロに近付く。つまり、粘弾性体ではなく、単なる粘性体の振舞いになってしまうのです。

|  |
| --- |
|  |

|  |
| --- |
| 図 5.5.3 応力緩和現象 |

#### Kelvin-Voigtモデル

Kelvin-Voigtモデルでは、バネとダッシュポットのひずみは同じであり、全応力は両構成要素の応力の和になる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.3) |
|  | (5.5.4) |

Kelvin-Voigt材は瞬間的な応力を与え、しばらく維持すると、ひずみは徐徐バネ剛性に決める変形量まで接近し、その後変化しなくなる。このような応力一定の状況下において時間依存性のある変位は「クリープ」と呼ばれる現象である。図 5.5.4 クリープ現象に示した例では、変形が安定した後に応力を外す時に変形挙動を示している。図に示したように、時間が十分立つと、変形量は完全になくなる。すなわち、Kelvin-Voigtモデルに示すクリープ現象は可逆クリープである。

|  |
| --- |
|  |

|  |
| --- |
| 図 5.5.4 クリープ現象 |

一方、Kelvin-Voigt材に瞬間ひずみをかけることができない。その時、ひずみ速度は無限になり、実現不能になる。

以上に示したように、MaxwellモデルおよびKelvin-Voigtモデルはそれぞれ応力緩和現象およびクリープ現象を表現することができるが、両現象を表現することができない。本ソフトウェアは図 5.5.5 一般化されたMaxwellモデルに示した一般化されたMaxwellモデル、またはMaxwell-Wiechertモデルを採用している。このモデルは応力緩和現象およびクリープ現象を表現でき、複雑な材料の粘弾性挙動をより現実に表現することができる。

|  |
| --- |
| http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/0/0a/Weichert.svg/1000px-Weichert.svg.png |

|  |
| --- |
| 図 5.5.5 一般化されたMaxwellモデルと単位ステップひずみに対する応力応答例 |

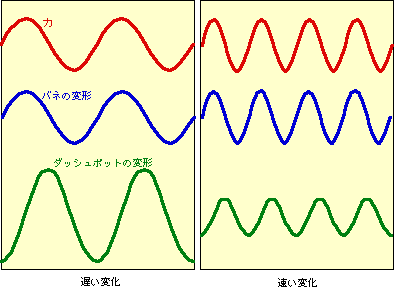
#### 動的粘弾性(http://hr-inoue.net/zscience/topics/viscoelastic/viscoelastic.html)

これまでは、「一定の変形」とか「一定の力」をかけた時の様子を見てきました。これはこれで大切な情報なのですが、前にも書いたように、現実の粘弾性体はたくさんのバネやダッシュポットがつながっていますから、変形や応力がじわじわ変化するような測定結果を基にして何らかの数値を引き出す、というのは結構大変です。これに対して、押し縮めたり引き伸ばしたりを繰り返し行なう方法を使うと、案外簡単に、きれいな解析結果が得られる場合が多くあります。このような周期的な変形や力を加えた時の応答を、「動的粘弾性」と言います。ちょっと考えると、一定の変形や力を加えるよりも、周期的に変化する変形や力を加えるほうが複雑なように思えるかもしれません。しかし、実際にやってみると、「動的粘弾性」の方がはるかに扱いやすいのです。  
　例えば、図 5.5.6 バネとダッシュポットの動的粘弾性のような装置を使って試料を押し縮めたり引き伸ばしたりを繰り返す場合を見てみましょう。試料に加える力は、図中に赤の線で示すように、時間の経過に伴って波形に変化させます。もし、この試料がバネだったら、押せば縮むし、引けば伸びますから、変形の時間変化は、図の青線のように力と同じ形の波になるはずです。それでは、もしも試料がダッシュポットだったらどうでしょうか。ちょっとわかり難いかも知れませんので、グラフの左端から変化を追ってみましょう。まず初めに上向きの力がかかります。すると、ダッシュポットは図の緑の線のように徐々に上に伸び始めます。上向きの力はどんどん大きくなりますから、ダッシュポットの伸びも一段と速くなり、緑線の傾きが急になります。力が最大に達した時（赤線の波の頂点）、ダッシュポットの伸びの速さ、つまり緑線の傾きも最大です。ここから力は減少に転じますが、依然として上向きの力がかかっていることに変わりはありませんから、伸びは鈍化するものの、ダッシュポットは相変わらず伸びつづけます。しかし力がゼロになってしまうと、ダッシュポットの動きも止まってしまいます。これが緑線の頂点に当たります。ここを過ぎると、力はマイナス、つまり下向きに変わります。そのためダッシュポットの動きも下向きに変わり、変形は小さくなり始めるのです。以下、下向き、上向きに同じパターンを繰り返し、図の緑線のような、波長が1/4だけずれた波が描かれるのです。

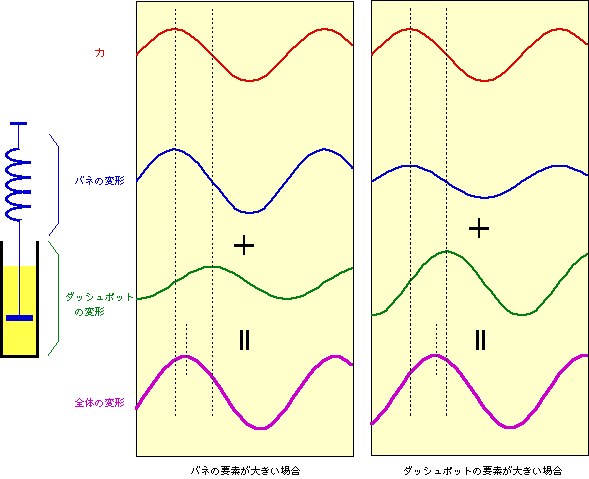
|  |
| --- |
| 図3 |

|  |
| --- |
| 図 5.5.6 バネとダッシュポットの動的粘弾性 |

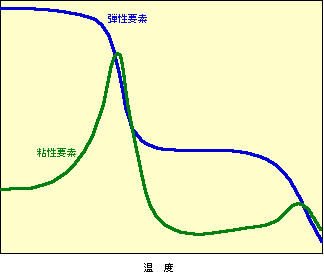
ダッシュポットに特徴的な要素として、周波数を変えると大きさが変わる、ということがあります。バネの方は、変化の速さに関係なく、強い力をかければ大きく変形するし、力が弱ければ変形も小さくなります。しかしダッシュポットの方は、速く変形させようとすればそれだけ強い抵抗に遭いますから、強い力が必要になりますし、逆に力を速く変化させると、抵抗が大きいので、あまり変形しないということなります。この様子を図4に示しました。

  
  
図4　周波数による、バネとダッシュポットの振舞いの違い

力の大きさ（振幅）が同じならば、周波数が高くても低くても、バネの変形幅は同じです。これに対してダッシュポットでは、周波数が高くなると変形幅が小さくなるのです（逆に、同じ変形幅にしようとすれば、もっと強い力が必要になります）。  
　弾性体（バネ）と粘性体（ダッシュポット）のそれぞれの動きはわかりました。それでは次に、粘弾性体の振舞いを見てみましょう。最も簡単なケースとして、図1のマックスウェル模型を考えます。これに周期的に変化する力を加えると、その力はバネにもダッシュポットにも同じようにかかりますから、それぞれ図3のパターンで変形するはずです。その結果、全体の変形は、図5のように、この両方を足し合わせたものになります。

  
  
図5　マックスウェル模型の動的粘弾性

　同じ波長の波を足し合わせた場合の特徴として、足し合わせた結果も、同じ波長の、位置が少しずれた波になっています。力の波と比べた時の位置ずれの程度は、図5からもわかるように、バネの要素が強い場合には小さく、ダッシュポットの要素が強い場合には大きくなります。バネ100%の場合は位置ずれはゼロ、ダッシュポット100%の場合は位置ずれは1/4波長ですから、粘弾性体では必ずこの中間になるのです。  
　一般化されたMaxwellモデルは、いろいろな強度のバネやダッシュポットの集合体と考えられるわけですが、その場合も、結果的には図5と同じような波のパターンになります。ですから、どんなバネやダッシュポットが含まれているかを考えなくても、とりあえず、全体としてバネ（つまり弾性体）の要素がどのくらい含まれていて、ダッシュポット（つまり粘性体）の要素がどのくらい含まれているか、ということは知ることができるのです。これが動的粘弾性のいいところです。  
　実際の測定では、温度や周波数を変えて弾性要素、粘性要素を求めるのが普通です。こうすることで、その試料に含まれている弾性要素、粘性要素がどのようなものかを知ることができます。現実的には、周波数を何桁も変えて測定するのは大変なので、周波数は一定にして、温度を変えて測定します。前に書いたように、粘弾性に対する温度と時間（つまり周波数）の影響は同じなので、温度だけ変化させれば十分なのです。  
　このようにして測定した例を図6に示しておきました。これは、プラスティックなどによく見られるパターンで、横軸は温度、縦軸は弾性要素と粘性要素の大きさを表しています。縦軸は対数表示する場合も多いのですが、ここでは対数にせずに表示していますので、他の本などに載っている図と、見た目が違っているかもしれません。

  
  
図6　プラスティックの典型的な動的粘弾性

　よく冷えた状態では弾性要素が圧倒的で、要するにカチンコチンの状態です。ところが、あるところから柔らかさが出てきて、弾性が小さくなり始めます。このまま素直に弾性が小さくなるかというとそうでもなく、途中で一旦平らになり、最後に一気に柔らかくなって流動状態となっています（このようにならない物質ももちろんあります）。途中で平らになるのは、鎖状の分子同士が絡み合って、ゴムのような状態になっているからです。ゴムというものは、熱が加わると分子鎖がより激しく絡み合って縮もうとする性質があり、その結果全体が硬くなろうとします。この硬くなる要素と、通常の温度を上げると柔らかくなる要素が打ち消しあって、トータルでは弾性があまり変化しないように見えているのです。  
　このような弾性の変化に対して粘性は少し複雑な動きをします。低温ではほとんど流動性がないので、粘性の要素は小さいですが、少し温度が上がって柔らかくなり始めると、粘性要素は急に大きくなります。ところが、それ以上温度が上がると再び粘性が低下します。弾性と粘性で逆の形になることを期待されていたかもしれませんが、そうではありません。でも、よく考えてみれば当然のことです。温度が高くなればより柔らかく、流れやすくなりますから、粘度は下がるのです。同じような粘性要素の増減が、ゴム領域から出る部分でも見られています。  
　この例では弾性要素、粘性要素が大きく変化する部分が２箇所現れていますが、材料によってははっきり現れなかったり、１箇所だけだったり、また３箇所以上だったりします。いずれにしても、粘弾性の大きな変化というのは、その物質を構成する原子や分子が大きく運動を始める領域に対応しており、それが枝葉の小さな動きであったり、メインの鎖の大きな動きであったりすることで、違った温度領域に、違った大きさで現れるのです。

### 一般化されたMaxwellモデル

粘弾性材の構成式は偏差応力**s**と体積応力**p**を用いて、以下のように書くことができます。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.5) |
|  | (5.5.6) |

さらに、緩和係数GとKは、以下のProny級数で表されます。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.7) |

ここで、**e**は偏差ひずみを表しています。本ソフトは等方性の粘弾性材料を実装しているため、以下では等方粘弾性材料の構成式を導きます。また、本ソフトでは体積緩和係数Kは時間依存性がないと仮定している。

上述の構成式は微分形式に書き換えることができます。このとき、構成式は以下のように偏差弾性ひずみ**e**と偏差粘性ひずみ**q**の関数になります。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.8) |

ここで

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.9) |

と書き換えると、一般化されたMaxwellモデルを表しています。また、**q**は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.10) |

から求められます。ここではは緩和係数です。

　以下では、以上の微分形式および積分形式の構成式から有限要素解析に適応した時間離散化式を求めます。

### 更新アルゴリズムおよびConsistent接線係数

後退Euler時間積分法

　式(5.5.10)は時間の一次微分方程式であり、以下のように後退Euler積分方法により計算します。ここで、時間増分をとすると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.11) |

この式からを計算できます。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.12) |

　この式を式(1.4)に代入すると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.13) |

式(1.9)から下記のConsistent接線係数を計算することができます。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.14) |

ここで、**E**は対角マトリクスであり、その成分はすべて1です。

直接積分法

　式(1.3)を式(1.2)に代入すると下式が得られます。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.15) |

また、式(5.5.10)から

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.16) |

が得られます。この式を式(1.11)に代入すると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.17) |

が得られます。続いて、式(5.5.16)の積分方法を検討します。

　ひずみの初期値を時間=0で与えることを仮定し、時間増分ごとに式(5.5.16)の積分を行います。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.18) |

その結果、以下の再帰的な計算式が得られます。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.19) |

さらに、**e**の増分はある時間増分内はt’の線形関数と仮定します。

そのとき、この積分計算は以下のようになります。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.20) |

しかし、この式はの時には計算できないため、十分小さい時には以下の近似計算を採用します。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.21) |

式(1.16)を式(1.13)に代入すると、下記のConsistent接線係数を計算することができます。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.22) |

このアルゴリズムは二次精度を有し[9]、本ソフトはこのアルゴリズムを採用している。

### 動的粘弾性

　正弦的変化を持つ、規則正しい振動を与える場合に現れる粘弾性挙動を、動的粘弾性を呼ぶ。定常振動状態における一般的な粘弾性挙動として、応力とひずみは共に正弦的に変化するが、ひずみと応力の間に位相差が生じる（図 5.5.7動的粘弾性における応力と変形の挙動）。この応力とひずみの挙動は次式のように記述される。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.23) |

ここでは、**σ**0、**ε**0、δはそれぞれ応力振幅、ひずみ振幅、位相差である。また、位相差は弾性体の場合はゼロであり、粘性体の場合。粘弾性体の場合では。

|  |
| --- |
| 図3 |

|  |
| --- |
| 図 5.5.7動的粘弾性における応力と変形の挙動 |

　Maxwellモデルを採用した場合、このモデルに対して励起振動数ωの正弦的な外力を与えるとすると、複素平面上における応力は次式のように記述される。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.24) |

一方、Maxwellモデルの釣り合い式は次式のように記述される(式(5.5.2))。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.25) |

式(5.5.25)を式(5.5.24)に代入するより、次式に示すひずみ速度式を得る

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.26) |

また、上式εを対する積分することにより次式を得る。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.27) |

式(5.5.27)は式(5.5.24)の応力変動に対するひずみの応答となる。式(5.5.27)は式(5.5.24)の比は複素弾性率G\*と呼ばれ、複素平面における弾性率と意味する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.28) |

式(5.5.28)において、複素弾性率G\*の実数部と虚数部を分離して記述することより次式を得る。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.29) |

ここで、G’とG’’はそれぞれ貯蔵弾性率と損失弾性率と呼ぶ。

### 温度依存性

　一般的には粘性は温度に強く依存する。例えガラス性材料は高温上粘性流体となるが、低温状態ては固体になる。粘性の温度依存行為は複雑であるが、たくさんな実験結果から、熱レオロジー的単純化仮定より、緩和時間のスケール変換より高温状態の粘性行為は低温状態の粘性行為を同じく見なすことができる。

熱レオロジー的単純化仮定を採用する時、構成式(5.5.6)はは以下のように書き換える：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.30) |

ここで、τは下記のような定義した擬似時間である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.31) |

また、θは温度であり、Aθは時間―温度シフト関数である。本ソフトは下記のシフト関数を実装している：

・　Williams-Landau-Ferryシフト関数([20])

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.32) |

ここでは、θ0は緩和データが与えられる参照温度（通常ガラス転移温度θgを関連付けています）、θは着目する温度、C1とC2はこの参照温度で得られる材料定数である。の場合、材質は弾性状態にとどまる。

・　アレニウス式([21])

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.33) |

ここで、Eは活性化エネルギー、Rは一般化ガス定数, θz使用している温度単位系での絶対セロ度, θ0は緩和データが与えられる参照温度、θは着目する温度である。

　式(5.5.30)の採用と伴って、擬似時間増分Δτと実時間増分Δtとの変換計算が必要となる。この関係は式(5.5.31)から計算できるが、Aθは温度の非線形関数であるため、もっと精度のよい計算方法を求められている。ここで、関数h(θ)=-lnAθ(θ)はn~n+1内の線形関数と近似し、さらに温度は時間tの線形関数と仮定すると、以下の式が得られる：

|  |  |
| --- | --- |
| 或いは | (5.5.34) |
|  |  |
|  |  |

この式から

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.35) |

または

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5.36) |

が得られる

## 粘塑性材料

　粘塑性モデルは変形速率依存性を持つ非弾性変形挙動を記述するモデルである。広義的には、4.5節に示した粘弾性モデルは一種の線形粘塑性モデルである。

　他には、粘塑性モデルは降伏面が存在しない変形速率依存性を持つ非弾性変形挙動を指すモデルと呼ぶことがあり、その変形特徴からクリープモデル、非線形粘弾性モデルを呼ばれることもある。本ソフトウェアは降伏面の存在も考慮し、上記の広義的な定義を使う。

### 粘塑性材料の変形特徴

#### ひずみ硬化

|  |
| --- |
| http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/4/42/Visco79.svg/1000px-Visco79.svg.png |

|  |
| --- |
| 図 5.6.1ひずみ速率が変化する時の応力―ひずみ曲線 |

#### クリープ

|  |
| --- |
|  |

|  |
| --- |
| 図 5.6.2クリープ：一様な応力条件下のひずみ増加 |

#### 応力緩和

|  |
| --- |
|  |

|  |
| --- |
| 図 5.6.3 応力緩和:一様なひずみ条件下の応力減少 |

### 一般化粘塑性モデル

粘塑性材の構成式は以下の方程式で表す。

・　ひずみ分解式

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.1) |

・変形エネルギー関数

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.2) |

ここでは**q**は硬化を表す内部変数である。

・応力関係式および硬化駆動力**A**

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.3) |

・流れ則

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.4) |

　前述の塑性材料でも示したように、粘塑性を示す構成式に対して数値解析上の時間積分の方法を示さなければならい。粘塑性を考慮したときの構成式は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.5) |
|  | (5.6.6) |

ここで、は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.7) |

とする。式(5.6.4)、(5.6.5)と式(5.6.7)から

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.8) |

が得られる。次では、Newton-Raphson法を用い、この非線形方程式からクリープひずみ増分を求める。

　初期値をおよびひずみを求められたとして、反復解と増分解は次式とする。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.9) |

ここで、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.10) |

とする。上式(5.6.9)と式(5.6.10)の解を使って残差がになるまで反復解法を行うとき、応力と接線係数

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.11) |

を用いる。

#### 応力更新アルゴリズム

　式(5.6.7)の係数θ=0の時、式(5.6.10)および式(5.6.11)から

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.12) |

が得られる。この時

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.13) |

となる。この時の接線係数は標準的な弾性接線係数となり、計算コストが低いが、時間増分は以下の条件が満足しないと計算が不安定になる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.14) |

経験的には、以下の条件が満足すればよい。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.15) |

　式(5.6.7)の係数θ=1の時、陰的解法になる。この時の接線係数は式(5.6.11)となり、この接線係数を計算するのに時間がかかる他、非対称になる可能性もある。この方法を採用すると計算時間かかることになるが、計算精度はよくなるため、本ソフトウェアは粘塑性材料に対し陰的積分方法を採用している。

### 降伏面が有する粘塑性モデル

上記の式(5.6.1)~(5.6.4)では特に降伏面の存在を仮定していないが、降伏面が存在する場合では

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.16) |

ここではΨは降伏関数を表す。この式は式(5.3.4)と(5.3.5)に示した弾塑性変形関係と同じである。ただし、ここで表す時間微分は実時間微分である。

　粘塑性変形問題の解法は4.3節に示した弾塑性問題の解法と同じである。粘塑性接線係数は式(5.3.10)に示した塑性率パラメータを粘性係数に入れ替えたら得られる。

本ソフトは後退型Euler積分法（return mapping法）を利用し、粘塑性変形を計算する。ステップnの変形状態は既知として、まずは試行応力を計算する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.17) |

ここから式(5.6.3)から応力および硬化係数を計算し、降伏条件

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.18) |

を満足しなければ、更新計算が完了し、そうではない場合では後退型Euler積分法を用い、粘塑性ひずみおよび応力を計算する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.19) |

ここでは

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.20) |

である。

#### 等方性(mises)降伏関数を利用した場合の定式化

Mises降伏関数を採用した場合、上記の計算式はさらに展開することができる。この時

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.21) |

となり、この式を式(5.6.19)に代入し、弾性マトリクスをかけると下式が得られる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.22) |

さらに、Mises等価応力の定義から、式(5.6.22)は下式へ変化できる。

|  |  |
| --- | --- |
| . | (5.6.23) |

弾塑性材料と違って、更新後のMises応力は降伏条件を満足する必要がなく,5.6.4節に示した粘塑性流れ則を満足することになる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.24) |

Newton-Raphson法を用い、上式から粘塑性ひずみ増分を求めることができる。その手順は以下である。

|  |
| --- |
| 1. 初期設定k:=0 2. Newton-Raphson法計算 3. 収束条件をチェック   IF 収束したと判定   1. GOTO 1 |

|  |
| --- |
| 表5.6.1 粘塑性ひずみ増分計算アルゴリズム |

次では、粘塑性材の接線係数を導く。式(5.6.22)から、更新後の応力を計算する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.25) |

この式から

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.26) |

のように接線係数を計算できる。また、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.27) |

また、式(5.6.24)から

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.28) |

が得られる。ここで得られた式(5.6.27) および式(5.6.28)は式(5.6.30)に代入し、粘塑性材の接線剛性係数が得られる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.29) |

　以下では本ソフトウェア導入した粘塑性モデルを列挙する。

### 本ソフト導入した粘塑性モデル

#### Norton則（時間硬化則）

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.30) |

ここでは、は相当粘性ひずみ、はmises応力、tは時間であり、Aとm,nは材料係数である。この式は降伏面が存在しないとしている。θ=0

　上式から

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.31) |

が得られ、この式を式(5.6.29)に代入すると、その接線係数が得られる。

　応力更新過程

・

・

・

・　if R<ε 終了

・

・

#### Binghamモデル

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.32) |

この時

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.33) |
|  | (5.6.34) |

その接線係数は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.35) |

となる

#### Perzynaモデル

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.36) |

この時

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.37) |
|  | (5.6.38) |

その接線係数は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.39) |

　粘性モデルのもっとも一般的な書き方は以下になる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6.40) |

ここではt,Tはそれぞれ時間と温度を表し、は経験関数である。これらの経験関数はいくつかあるが、本作業は多数のモデルの存在を意識するソフト設計を行い、まずBinghamモデルおよびPerzynaモデルを実装する。

#### ORNL (Oak Ridge National Laboratory)モデル

# 要素ライブラリ

## 有限要素による空間離散方法

有限要素法解析では、連続空間を離散化し、有限個の要素で表す。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1.1) |

ここでは、は要素の数、上付きhを離散化された領域を表す。

### 有限要素補間

　本ソフトは変位型有限要素法を使用している。その特徴は、連続体の任意一点の座標および変位場は有限要素毎に要素を構成する節点の変位を用い次式のように内挿する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1.2) |
|  | (5.1.3) |

ここで、**M**と**N**はそれぞれ形状(補間)関数と変位(補間関数)と呼び、mは要素節点数である。特に**M**と**N**は同じ関数で与える場合、その要素をアイソパラメトリック要素と呼ぶ。

　本ソフトでは、すべての要素がアイソパラメトリック要素であり、上記の二つの補間関数を形状関数と呼ぶ。

ここで形状関数**N**は**r**について微分可能な連続関数とする。**r**は一般的には自然座標と呼ばれている。式(5.1.2)は**r**から**x**への写像を表している。一方、微分の連鎖則を用いて

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1.4) |

へ変形し、式(5.1.3)を用い、変位勾配は以下のように書き換えられる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1.5) |

ここで、**r**から**x**への写像におけるヤコビマトリクスを**J**とした（d**x**=**J**d**r**）。

　式(5.1.5)を利用し、式(3.2.1)あるいは式(3.2.26)に示した変位―ひずみ関係は形状関数より表すことができる。例え式(3.2.1)に示した微小変形ひずみは以下である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1.6) |
|  | (5.1.7) |
|  | (5.1.8) |
|  | (5.1.9) |

### 数値積分

要素剛性マトリクス、要素質量マトリクス、節点力などを計算するたび、要素全域に対する積分を行う必要がある。このような積分は、一般的には複雑であるために解析的に行うことは困難であるため、特殊な場合を除いて何らかの数値的な手法が用いられる。

数値積分とは積分領域内に複数のサンプリング点をとり、次式によって積分を近似的に評価する方法である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1.10) |

ここで、nはサンプリング点の総数であり、は重み係数である。

一方、面荷重、接触力などを計算する時、要素面に対する積分を行う必要がある。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1.11) |

ここで、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1.12) |

である。ξとηは要素面の自然座標を表している。

以下では、本ソフトで実装している要素およびその形状関数を紹介する。

## ソリッド要素

### 四面体要素

四面体要素は図5.2.1に示している自然座標を用い形状関数を構築する。四面体一次要素の形状関数は以下である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.1) |

四面体二次要素の形状関数は以下である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.2) |

ただし、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.3) |

とした。

|  |
| --- |
| ξ  η  ζ  1  2  3  4  ξ  η  ζ  1  2  3  4  6  7  5  9  10  8 |
| 図5.2.6.2.1四面体1次および2次要素 |

四面体要素の積分点位置は以下である。

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 全積分点数 | 積分点数 |  | 重み |
| 1 | 1 |  |  |
| 4 | 4 |  |  |
| 15 | 1 |  |  |
| 4 |  |  |
| 4 |  |  |
| 6 |  |  |

表5.2.1 四面体要素の積分点

### 五面体（ピラミッド）要素

ピラミッド要素は図5.2.2に示している自然座標を用い形状関数を構築する。ピラミッド一次要素の形状関数は以下である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.4) |

ただし、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.5) |

とした。

ピラミッド二次要素の形状関数は以下である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.4) |

ただし、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.5) |

とした。

|  |
| --- |
| ξ  η  ζ  1  2  3  4  5  ξ  η  ζ  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13 |
| 図5.2.2五面体（ピラミッド）1次および2次要素 |

ピラミッド要素の積分点位置は以下である。

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 全積分点数 | 積分点数 |  | 重み |
| 2 | 2 |  |  |
| 5 | 4 |  |  |
| 1 |  |  |
| 13 | 4 |  |  |
| 2 |  | 0.25718374524020  646589 |
| 2 |  | 0.25718374524020  646589 |
| 1 |  | 2.47400497711340  5936 |
| 4 |  | 0.41951573719152  5950 |

表5.2.2 ピラミッド要素の積分点

### プリズム要素

　プリズム要素は図5.2.3に示している自然座標を用い形状関数を構築する。プリズム一次要素の形状関数は以下である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.6) |

プリズム二次要素の形状関数は以下である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.7) |

ただし、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.8) |

とした。

|  |
| --- |
| ξ  ζ  η  1  2  3  4  5  6  ξ  ζ  η  1  2  3  4  5  6  10  8  9  7  11  12  13  14  15 |
| 図5.2.3プリズム1次要素および2次要素 |

プリズム要素は上と下両三角形から構築される。その積分点位置は以下である。。

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 全積分点数 | 積分点数 |  | 重み |
| 1 | 1 |  |  |
| 9 | 6 |  |  |
| 3 |  |  |
| 18 | 6 |  |  |
| 3 |  |  |
| 6 |  |  |
| 3 |  |  |

表5.2.3 プリズム要素の積分点

### 六面体要素

六面体要素は図5.2.3に示している自然座標を用い形状関数を構築する。六面体一次要素の形状関数は以下である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.9) |

20節点六面体二次要素の形状関数は以下である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.10) |

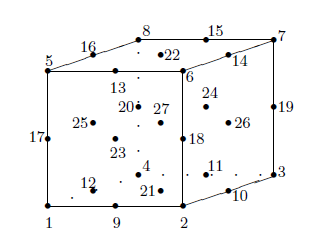
27節点六面体二次要素の形状関数は以下である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.11) |

ただし

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.11) |

|  |
| --- |
| ξ  η  ζ  ξ  η  ζ |
| 図5.2.3六面体1次要素および2次要素 |



自然座標系で表す六面体要素は(−1 ≤ *ξ, η, ζ* ≤ 1)の正六面体である。積分を行う時、各座標方向に同じ積分点数をとる。表5.2.4は各積分点の位置および重みを示している。

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| scheme | 積分点数 |  | 重み |
| 1×1×1 | 1 | (0,0,0) | 8 |
| 2×2×2 | 8 |  | 1 |
| 3×3×3 | 8 |  |  |
| 12 |  |  |
| 6 |  |  |
| 1 | (0,0,0) | 1 |

表5.2.4 六面体要素の積分点

・　非適合要素[13]

　完全積分六面体一次要素は曲げ現象を対象とした解析を扱う場合では、極端に剛な応答が得られ、誤差が過大になるせん断ロッキング現象が起きる。その解決方法の一つは要素ごとに独立な自由度を増やし、ロッキングを回避する方法である。

　非適合六面体一次要素は式(5.1.3)にしめした変位補間式を代わりに、以下の変位補間を行う

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.11) |

ここで，右辺第一項のは式(5.2.9)に示した標準的なの形状関数であり，右辺第二項のは式(5.2.12)で示される形状関数である．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.12) |

は（一般的な変位とは区別される）変位ベクトルである。ただし、ここでは非適合モードが要素内に発生する節点間の曲げモードを想定していることから，は節点自由度の追加として扱われず，要素自由度に対する変位ベクトルとして扱われる

・　選択低減積分要素[14]

完全積分六面体一次要素は非圧縮材料を扱う場合では、極端に剛な応答が得られ、誤差が過大になる体積ロッキング現象が起きる。その解決方法の一つは体積ひずみに関する項を1点で積分する方法であり、選択的低減積分と呼ぶ。

　完全積分六面体一次要素は式(5.1.6)に示したように各積分点のひずみを計算するが、選択低減積分要素はまずひずみの体積成分と偏差成分を分解する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.13) |

そして、この第一項目のは要素の体積平均値で評価したで置き換え、各積分点のひずみを計算する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2.14) |

### 無限要素

* are used in boundary value problems defined in unbounded domains or problems in which the region of interest is small in size compared to the surrounding medium;
* are usually used in conjunction with finite elements;
* can have linear behavior only;
* provide stiffness in static solid continuum analyses; and
* provide 無反射境界 to the finite element model in dynamic analyses

## シェル要素



図6.3.1 アイソパラメトリックシェル要素

### アイソパラメトリックシェル要素

　シェル要素は構造要素であり、薄肉構造物の解析に用いられる。

　アイソパラメトリックシェル要素は3次元ソリッド要素の厚み方向につぶすように作られているため縮退(degenerated)要素とも呼ばれている。本ソフトはアイソパラメトリックシェル要素を使っている。

　図5.3.1はアイソパラメトリックシェル要素のモデル図を示す。図5.3.1より、シェルの中立面は自然座標系ξ-ηと表し、シェルの厚み方向の座標はζと表す。さらに、ξ、ηとζは要素内-1から1まで変化すると仮定すると、シェル要素内の任意一点の座標は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.3.1) |

で表せる。ここでは**V**iはシェルディレクターであり、その長さはシェルの厚さtである。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.3.2) |

　時間ステップn（時刻ｔ）から時間ステップn +1（時刻t’＝t＋⊿t）までの変位増分ベクトル**u**は以下となる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.3.3) |

ここで、**I**は単位テンソル、はディレクターベクトルに対する時間ステップnから時間ステップn+1までの有限回転テンソルである。

シェルのディレクターの時間ステップn～n+1までの有限回転に関して、回転の間に回転軸は変化しないものと仮定する。この時回転軸を表すベクトルを軸性ベクトルとし、その大きさが有限回転角ωを表すとする。

|  |  |
| --- | --- |
| ；軸性ベクトル | (6.3.4) |
| ：有限回転角 | (6.3.5) |

次に軸性ベクトルを用いて反対称マトリックスを定義する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.3.6) |

　上記において、はディレクターベクトルの第i成分であり、回転マトリックスにより変形の都度、更新するものとする。有限回転は微小回転の集まりと考えれば、有限回転テンソルは以下のようにあらわすことができる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.3.7) |

式(6.3.6)を式(6.3.2)に代入すれば、変位ベクトルの離散形が得られる。特に、回転角は十分小さい場合では、以下の式が得られる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.3.8) |

本ソフトウェアは式(6.3.8)に示したように、変位自由度三つ、回転自由度三つを使ってシェル要素内の変形を表す。しかし、シェル要素の変形は自由度五つより表すことができ、シェル法線方向に対する回転自由度はDrilling degree of freedomと呼び、余分な自由度になるため、得られた方程式が奇異になる可能性がある。ここで、下記の式のように拘束する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.3.9) |

この条件を有限要素計算に取り入れるため、上記の式は下記のdrillingエネルギーを利用する：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.3.10) |

ここでKθθ>0はpenalty係数である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.3.11) |

式(6.4.1)と式(6.4.3)を利用し、要素内の変位、ひずみを評価することが可能になる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.4) |
|  | (6.4.5) |
|  | (6.4.6) |
|  | (6.3.12) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.3.13) |

・　の処理

　シェル要素は平面応力条件を満足する必要がある。この条件は板厚方向のひずみを調整することで実現できる 。式(6.3.13)ではひずみ成分E33は板厚の変化を考慮していないが、修正ひずみは板厚を表している。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.3.14) |

　R.D. Borst: The zero-normal stress condition in plane-stress and shell elastoplaticity

　Code\_Aster: Taking into account of the assumption of the plane stresses in the nonlinear behaviors

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.3.15) |

条件から

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.3.16) |

この式を(6.3.14)まで代入すると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.3.17) |

が得られる。

残差力の計算

・　Calculate ε33 according to (6.3.16) knowing σ33 at last step (should be zero)

・　Calculate stress increment

・　Calculate ε33 according to (6.3.16) knowing modified σ33 and enforce it to zero.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.3.18) |

### MITCシェル要素

シェル要素の大きさとシェルの厚さの比は大きくなると、Shear Lockingする問題があることが知られている。この問題を回避できるMITC要素が注目されている。

　Shear Lockingは実際によく使用される低次な要素に関して面外せん断ひずみエネルギーが過剰に評価されることより発生すると言われており、MITC要素ではその対策として面外せん断ひずみ成分を取り去る方法がとられている。

　その具体的方法として面内ひずみは3次元ソリッドと同様に変位の形状関数を微分して求めるが、面外ひずみについては、まずサンプリング点について面外ひずみを求めたのち、要素内任意点についてはサンプリング点を補間することにより求める。

　また、有限回転の場合にも適用できるように、埋め込み座標系でのひずみ成分を用いる。埋め込み座標としては、アイソパラメトリック要素における自然座標系を用いる。

#### MITC4シェル要素[15]

|  |
| --- |
| D(1,0)  η  ξ  B(-1,0)  A(0,1)  C(0,-1) |
| 6.3.2　面外せん断ひずみのサンプリング点(MITC4) |

MITC4シェル要素では、面外ひずみの補間に用いるサンプリング点は6.3.2に示すA,B,C,Dの4点とする。この時、面外ひずみの計算は下式に示す。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.3.8) |

#### MITC3シェル要素[16]

|  |
| --- |
| η  ξ  B(0,0.5)  A(0.5,0)  C(0,5,0.5) |
| 図6.3.3 面外せん断ひずみのサンプリング点(MITC3) |

MITC3シェル要素では、面外ひずみの補間に用いるサンプリング点は6.3.3に示す各辺の中央点を取っている。ξ、ηは要素内0から1まで変化すると仮定し、図5.3.3には各サンプリング点の自然座標を示している。この時、面外ひずみの計算は下式に示す。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.3.9) |

#### MITC8シェル要素[17]

|  |
| --- |
| η  ξ |
| 6.3.4 MITC8節点位置 |

|  |
| --- |
| 1  RA  5  RB  3  4  2  1/√3  η  ξ  (a)  5  2  3  1  4  1/√3  SA  SB  (b) |
| 6.3.5　(a) を計算用サンプル点; (b)を計算用サンプル点位置 |

MITC8シェル要素図6.3.4に示しているでは8節点シェル要素である。その面外ひずみは図6.3.5(a)に示したサンプル点を用い以下のように計算する。

|  |  |
| --- | --- |
| ここでは, | (6.3.10) |

　また、面外ひずみは図6.3.5(b)に示したサンプル点を用い以下のように計算する。

|  |  |
| --- | --- |
| ここでは, | (6.3.11) |

#### MITC6シェル要素[16]

|  |
| --- |
| (r1,0)  (r2,0)  η  ξ  (0,s1)  (0,s2)  (r2,s2))  (r1,s1) |
| 図6.3.6 面外せん断ひずみのサンプリング点(MITC6) |

MITC6シェル要素では、面外ひずみの補間に用いるサンプリング点は6.3.5に示している。ここでは, である。この時、面外ひずみの計算は下式に示す。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.3.12) |

　ここでは

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

#### MITC9シェル要素[19]

|  |
| --- |
| η  ξ |
| 6.3.7 MITC9節点位置 |

|  |
| --- |
| √5/3  1  3  4  2  1/√3  η  ξ  (a)  √5/3  2  3  1  4  1/√3  (b)  1/√3  2  3  1  4  1/√3  (c) |
| 6.3.8　(a) ,を計算用サンプル点; (b)を計算用サンプル点位置  (c) を計算用サンプル点 |

MITC9シェル要素図6.3.7に示しているでは9節点シェル要素である。その面外ひずみは図6.3.5(a)に示したサンプル点を用い以下のように計算する。

|  |  |
| --- | --- |
| ここでは, | (6.3.10) |

　また、面外ひずみは図6.3.5(b)に示したサンプル点を用い以下のように計算する。

|  |  |
| --- | --- |
| ここでは, | (6.3.11) |

## 梁要素

　梁要素は数学的に一次元構造で表せる要素である。断面の寸法が長手方向の寸法より十分に小さいスレンダーな部材からなる構造物の解析に使用される。

　変形前後の梁は以下のように表せる：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.1) |

ここで**X**0と**x**0は梁中心線の座標である。はwarp変形を示しているが、本ソフトはこれを考慮していないため、以降無視される。

基準ベクトル**A**と**a**は直交であり、以下のように表せる：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.2) |

ここで,そのためその導関数は以下のように軸ベクトル**θ**0と**θ**より表せる

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.3) |

Green-Lagrangianひずみ

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.4) |

ここでを用いた。

　変分式

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.5) |

変形エネルギーは以下のように書き換えることもできる

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.6) |

ここでは

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.7) |

その共役ひずみの変分は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.8) |

である。

　梁要素の実装方法は式(6.4.5)と式(6.4.6)を利用する二種類の方法がある。式(6.4.7)に示した積分式は明示的な積分できる場合では式(6.4.6)を利用した方が効率よく計算できて、そうしない場合では式式(6.4.5)を利用する。

### アイソパラメトリック梁要素

　アイソパラメトリック梁要素は3次元ソリッド要素の断面方向につぶすように作られているため縮退要素である。その定式化は式(6.4.5)である。

|  |
| --- |
| **V**2  **V**3  **V**1  a  b  ξ  η  ζ |
| 6.4.1 アイソパラメトリック梁要素 |

図6.4.1はアイソパラメトリック梁要素のモデル図を示す。、梁の中立軸は自然座標系のξ軸と、断面はη-ζ面とそれぞれ写像関係にある。また、各節点は初期状態において、局所座標系の方向を示す単位直交ベクトル**V**i(i=1~3)を有している。

梁要素内の任意一点の座標は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.9) |

そのJacobianは

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.10) |

時間ステップn（時刻ｔ）から時間ステップn +1（時刻t’＝t＋⊿t）までの変位増分ベクトル**u**は以下となる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.11) |

ここで、**I**は単位テンソル、はディレクターベクトルに対する時間ステップnから時間ステップn+1までの有限回転テンソルである。この式(6.3.6)を上式に代入すると,以下の式が得られる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.3) |

式(6.4.1)と式(6.4.3)を利用し、要素内の変位、ひずみを評価することが可能になる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.4) |
|  | (6.4.5) |
|  | (6.4.6) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.12) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.13) |

#### 円形断面梁

t

s

ζ

ξ

r

図6.4.1 A typical beam element with circular section

#### 円環断面梁

| **Section type** | **Shear factor, *k*** |
| --- | --- |
| Arbitrary | 1.0 |
| Box | 0.44 |
| Circular | 0.89 |
| Elbow | 0.85 |
| Generalized | 1.0 |
| Hexagonal | 0.53 |
| I (and T) | 0.44 |
| L | 1.0 |
| Meshed | 1.0 |
| Nonlinear generalized | 1.0 |
| Pipe | 0.53 |
| Rectangular | 0.85 |
| Trapezoidal | 0.822 |

#### 円断面上の積分法

　断面形状は円である場合、梁要素の体積は

|  |  |
| --- | --- |
| ;ξ,ζ,η⊆[-1,1] | (6.4.14) |

ここでは

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.15) |

であるため、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.16) |

円断面

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.17) |

円環断面

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.18) |

Therefore

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.19) |

この式を式(6.4.16)に代入すると

円筒

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.20) |

円：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.21) |

For arbitrary function f

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.22) |

### 梁要素

　微小変形の場合、梁の軸変形、曲げ変形、面内変形などにお互いに影響なく、別々に考慮することができる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.23) |

上では正ひずみのみの二次成分を考慮している。

　構成式

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.24) |

変形ポテンシャル

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.25) |
|  |  |

##### Bernoulli-Euler梁

　を仮定すると, Bernoulli-Euler梁になる。下記2節点BE梁要素の定式化を行う。

　軸方向では

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.26) |

曲げ変形：ξ-ζ面では

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.27) |

η-ζ面では

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.28) |

Hermite内挿形状関数

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.29) |

変位

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.30) |

中立軸

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.31) |
|  |  |
|  |  |

ひずみ

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | (6.4.32) | |
|  |  | |
|  |  | |
|  |  | |
|  | |  |
|  | |  |

但し、以下ではせん断ひずみを無視する。

変形エネルギー

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.33) |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

変形ポテンシャル

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.34) |
|  |  |

正ひずみ成分

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.35) |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

##### Timoshenko梁

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.4.36) |

## トラス要素・ケーブル要素

トラス要素は梁要素と同じく断面の寸法が長手方向の寸法より十分に小さいスレンダーな部材からなる構造物の解析に使用されるが、曲げに対する抵抗は示さず部材方向に沿った引張りや圧縮の軸力のみを受け持つという力学的性質を有する。また、圧縮の軸力を受け持つことができないトラス要素はケーブル要素と呼ぶ。

|  |
| --- |
| 1  2  1  2  3  1  2  3  4  L  L  L  ξ  ξ  ξ |
| 6.5.1　　 2節点、3節点、4節点トラス要素 |

トラス要素内の任意一点の座標および変位は以下である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.5.1) |

　トラス要素内の応力はトラス断面の正応力しかないため、その長手方向のひずみだけを考慮すればいい。その時のトラス長手軸上Green-Lagrangeひずみは

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.5.2) |

である。ここでは、Lは曲線の長さであり、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.5.3) |

この問題のJacobianは

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.5.4) |

であり、式(6.5.2)から

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.5.5) |

この式に(6.5.1)を代入すると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.5.6) |

が得られ、この式はGreen-Lagrangeひずみの有限要素離散式である。

　　また、Update Lagrange法を採用する時、対数ひずみを利用する、この時

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.5.7) |

である。

## Rebar要素

　Rebar要素は母要素に埋め込む特殊なトラス要素である。その特殊性は以下である：

1)　Rebar要素の向きは埋め込まれた平面要素の局所座標系(**x**l,**y**l)による表すことである：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.6.1) |

　局所座標系(**x**l,**y**l)は以下のように定義される：

・　ユーザ定義した局所座標系。そうしない場合では

・　局所座標系(**x**l,**y**l)は自然座標系ξの方向へ向き、シェル法線方向と構築した直交座標系

2) Rebar要素の体積は埋め込まれた平面要素の面積と比例する

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.5.2) |

ここでは、ArはRebar要素の断面積、SrはRebar要素の間隔、Amは平面要素の面積である。

|  |
| --- |
| s  η  ξ  θ  xl  yl |
| 6.3.7 Rebar要素 |

そのため、Rebar要素方向に沿った微分は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.6.3) |

ここからGreen-Lagrangeひずみ

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.6.4) |

を計算できる。また、シェル要素内の変位uは以下のように表せるので、式(6.6.2)~(6.6.4)を利用し、要素内の変位、ひずみを評価することが可能になる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.6.4) |

## マス要素

マス要素の使用により、剛性慣性を指定節点に取り付けることができる。マス要素自体は剛性がない。

節点位置は剛体の質量中心であることを仮定している。剛体の質量は質量密度ρの積分である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.7.1) |

剛体は回転慣性を有する時、その主軸を**e**α,α=1,2,3指定する必要がある。また、節点位置は剛体の質量中心を仮定しているため

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.7.2) |

その主軸**e**1, **e**2, **e**3に対する二次モーメントは以下である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.7.3) |

## ガスケット要素

|  |
| --- |
|  |
| 図6.8.1 Gasket構造 |

　ガスケット要素は複数な材料から構築し、その構造はいろいろある。図6.8.1は一つの例として示している。ガスケットはシーリング部品であるため、その厚さ（ガスケットの一番薄い）方向の変形を適切に設計されている。

|  |
| --- |
|  |
| 図6.8.2 Gasket要素の変形は三方向へ分解されている |

　図6.8.2ではガスケット要素の変形挙動を三方向を分解し示しているが、法線方向の変形のみを取り扱うのは一番使いやすい。その変形は弾塑性、クリープ、損傷を考慮した弾塑性モデルなど使われているが、図6.8.3は一番多く使われている弾塑性変形挙動を示している。

|  |
| --- |
|  |
| 図6.8.3 Gasket材質 |

## 剛体要素・準剛体要素

　変形しない要素は剛体要素，均一に変形する要素は準剛体要素とよぶ。準剛体要素内の座標は以下のように、参考点の初期配置座標Rと現配置の座標r及び変形勾配Fから表すことができる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.9.1) |

剛体要素の場合では、その座標は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.9.2) |

となり、式(6.9.1）内の変形勾配Fを回転テンソルQと入れ替えるだけである。

### モーメントと回転モーメント

一つの剛体を記述するため、重心R,質量mと慣性マトリクスJが必要である。

有限要素で表す剛体の重心Rは下式から計算できる

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.9.3) |

剛体の質量は質量密度ρの積分である

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.9.4) |

剛体の線形モーメント保存則は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.9.5) |

剛体の回転メント保存則は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.9.6) |

ここではIは現配置慣性マトリクスである。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.9.7) |

初期慣性マトリクスJは

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.9.8) |

となる。

### 変形する要素と組み立て

　剛体はある節点Xを連結した時、以下の式を満足する必要がある。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.9.9) |

この条件をLagrange乗数法を使って拘束条件として加える。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.9.10) |

その変分

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.9.11) |

ここでを用いた。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.9.12) |

の変分から

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.9.13) |

分かるので

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.9.14) |

# 境界条件

## 付加質量

　ある物体は液体中変形する時、液体は変形体に力を加える。この力は付加質量(added mass)または仮想質量(virtual mass)より表現することができる。

　液体は理想流体(ideal fluid)と仮定する。この時、液体の速度は速度ポテンシャルΦ(**x**,t)より表せる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7.1.1) |

また、このポテンシャルはLaplace方程式を満足し

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7.1.2) |

境界面Sでは

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7.1.3) |

となる。液体内の圧力は下記Bernouli方程式から計算できる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7.1.4) |

この圧力は変形体に作用するので、流体-固体界面では下記の外力は加える。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7.1.5) |

流体領域は無限大の場合では、上式さらに下記のように簡単化でき

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7.1.6) |

速度ポテンシャルもになる。ここでは,x'は変形体に固定した座標である。この式を式(8.1.6)に代入すると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7.1.7) |

となり、ここで

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7.1.8) |

は付加質量または仮想質量という。

　これらの式を用い、速度ポテンシャルΦ(**x**,t)が分かれば、流体―固体間の作用も分かる。図7.1.1ではいくつかの式を示している。一般的な場合では、Φの計算も必要となり、有限要素法を用い式(7.1.2)と(7.1.3)を解くと、いわゆるFSI計算になる([26])。また、境界要素法を利用し、Φを計算手法もある([27])。

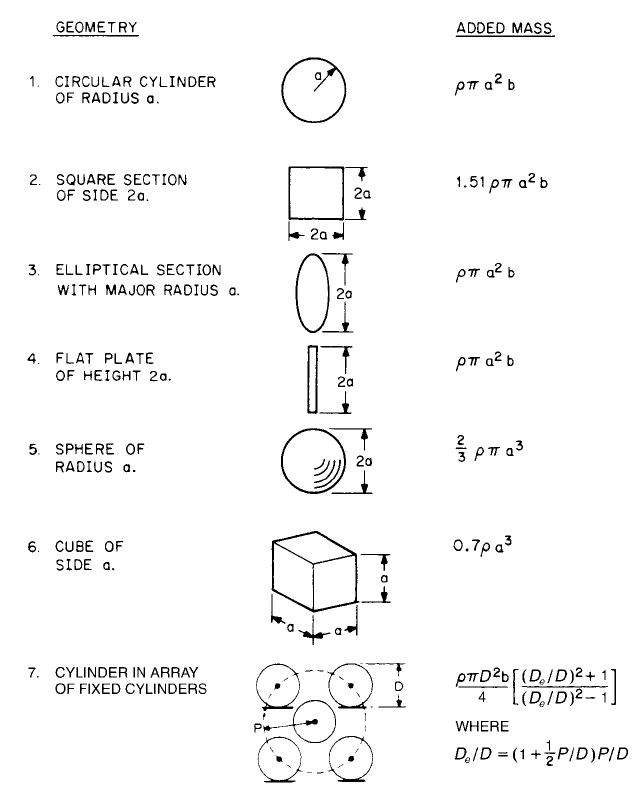


図7.1.1 界面法線方向の付加質量

本ソフトは

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7.1.9) |

ここでは、ρは流体の質量、Vは流体の体積、hは液面の高さ。

# 接触解析

　接触問題は一種の境界条件に起因する非線形現象である。ここでは、接触問題が固有する特徴とその解法、特に有限要素法定式化を体系的に紹介するものである。ここでは、有限すべりによる接触非線形を注目し、接触の接線剛性マトリクスを得ることを主な目標とする。または、本ソフトは微小すべり問題を対応しているが、微小すべり問題の接触剛性マトリクスは有限すべり接触接線剛性マトリクスの特例に過ぎず、その内容は本章の最後の部分で導入する。

　まず、第8.1節では接触力学の基礎式を紹介し、変形問題の接触拘束条件は導入する。続く第8.2節では、接触を考慮した仮想仕事原理式を導入し、そこで接触拘束条件の処理方法を紹介する。最後に第6.3節で得られた仮想仕事式を有限要素法により離散化し、有限要素法に対応した接触剛性マトリクスを導く。

## 接触力学

　本節は接触問題に関わる基本方程式を紹介する。

　本節では2物体の接触に関わる諸式を示すが、これを多体間の接触問題へ拡張することもできる。

### 表記法

本節では複数の変形体が有する場合の変形体の基準配置、現配置の表示方法を示している。

|  |
| --- |
| 基準配置  現配置 |
| 図8.1.1 変形体、境界と点 |

#### 基準配置

　図8.1.1に2つの物体の接触問題を概念的に示す。両物体の初期配置は既知であり、基準配置と呼ぶ。基準配置の諸変数は大文字のローマ、あるいはギリシャを示す。基準配置中第i番目の物体はと示す。

　中の任意一点はと示す。の境界はで示す。との間に接触可能な部分はそれぞれΓ(1)とΓ(2)で表す。

#### 現配置

　現配置においた諸変数は小文字のローマ、あるいはギリシャを示す。現配置内の一点は**x**(i)で表す。基準配置の各点から現配置の各点への同相写像を存在することが仮定する。ある時刻の写像は下付き文字tと表す。そして、ある時刻tの一点の現在位置は, またはとも表れる。同様に、各物体境界の現在位置もΓ(i)からのφ(i)写像から得られる。境界面の現在配置はで示す。ここでは、時刻が特定できる場合では、下付き文字tを省略できる。

### 接触キネマティクス

　接触解析のすべては接触表面上行うため、接触面のキネマティクス関係を明らかにする必要がある。また、接触面キネマティクスを便利に議論するため、はじめに接触座標系を作り出し、続きの議論はこの座標系の中で行う。

#### 接空間基底

|  |
| --- |
| **n**  **γ**  **p** |
| 図8.1.2 接ベクトル空間 |

　境界面上の任意点の基準配置および現配置の位置は以下のように書かれる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.1.1) |
|  | (8.1.2) |

この写像は接触面のパラメータ化と呼び、はパラメータである。

接触面上の点を**p**で表す。点**p**はパラメータをとして、曲線**p**()を描くとする。この曲線の接ベクトルが得られる。点**p**におけるすべての可能な接ベクトルの作る空間を、点**p**における接触面の接ベクトル空間または接空間と呼ぶ。

　現配置の接空間基底は以下のように得られる：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.1.3) |

またその計量テンソルをとなる。

　3次元空間では、2つの基準ベクトルが分かれば、下式を使って、表面の法線ベクトルを計算できる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.1.4) |

#### 法線方向距離と界面速度

本節では両接触面の距離および面間相対速度を定義する。まず一点から相手表面上の最近傍点（投影点とも呼ぶ）を定義する。この一点から投影点までの距離は法線方向距離であり、最近傍点の時間微分からすべり速度を測れる。

任意であるが、物体はslave物体、物体はmaster物体とする。離散化数値解析ではslaveとmaster物体の選定は解析収束性などに影響を与えるが、ここでは特に区別する必要がない。

|  |
| --- |
|  |
| 図8.1.3 最短距離、投影点 |

　Slave物体の一点のmaster物体への投影点はからまでの最近傍点と定義する。最近距離は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.1.5) |

として与えられ、投影点は以下のように定義される。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.1.6) |

　の位置は両接触体の変形および座標値に依存する。この事実を強調するため、以下の式を導入する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.1.7) |

ここで、上バー記号は投影点と関わる変数であることを示す。

　そして、slave物体の一点からその投影点の距離ベクトルは

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.1.8) |

となる。ここでは

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.1.9) |

として与えられ、その距離は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.1.10) |

でなる。

続いて、すべり速度を導く。はじめにslave物体の一点とその接触点を考慮する、この2点の法線方向の相対位置である場合、この2点は空間の同じ位置と維持するので、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.1.11) |

が得られる。そこで

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.1.12) |
|  | (8.1.13) |

式(8.1.13)と式(8.1.12)を式(8.1.11)に代入し、接触点の相対すべり速度は以下の式に与えられる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.1.14) |

　最後に、すべり速度ベクトルの成分は、の定義式(8.1.6)より求められる。この定義からは接触面と直交することが分かり、その式は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.1.15) |

となる。この式の物質時間微分をとり、さらに式(8.1.10)と式(8.1.13)を代入すると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.1.1) |

が得られる。この式を整理すると下の計算式が得られる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.1.17) |

ここで

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.1.18) |

特に接触点の貫通量の場合では下式が得られる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.1.19) |

### 接触拘束条件

　本節は、接触面法線方向の非貫通拘束条件および接触面接線方向の摩擦拘束条件を説明する。

#### 接触力

　接触力はCauchy応力から得られる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.1.20) |

この接触力を接触面の法線とすべり方向へ分解すると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.1.21) |

となる。

#### 非貫通拘束条件

　連続体力学では、2点は同じ位置を有することを許容しない。そのため、両物体が接触する場合では、この条件は以下のように言い換える：slave物体の任意点はmaster物体に貫通することができない。この条件より、接触面法線方向の拘束条件は、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.1.22) |
|  | (8.1.23) |
|  | (8.1.24) |

とする。ここでは、式(8.1.22)は接触点同士間の距離が必ずゼロ以上とする非貫通条件を示し、式(8.1.23)は接触力が圧縮力であることを示している。最後の式(8.1.24)はの相補性条件を述べている。すなわち、接触していないときには圧縮力は発生しない、代わりに圧縮力が存在している場合では、貫通量がゼロである。最適化計算分野では、以上の3式はKuhn-Tucker条件またはKarush-Kuhn-Tucker条件と呼ばれる。

#### 摩擦拘束条件

接触面内に摩擦効果が存在する場合、接触面内のすべり速度ベクトルと接線方向接触力に関して、以下に示す摩擦条件を考えることができる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.1.2) |
|  | (8.1.3) |
|  | (8.1.4) |
|  | (8.1.5) |

ここで、はすべり限界関数であり、すべり発生条件を表している。例えば、クーロン摩擦を考える場合では、摩擦係数をµとすると、すべり限界関数は以下のようになる(図8.1.実線を参照)。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.1.6) |

式(8.1.3)、式(8.1.4)はすべりが接触面内に作用する接触力ベクトルに生じることを表しており、式(8.1.5)は面内接触力が摩擦限界に到達したときに限ってすべりが発生することを表している。また、はすべりパラメータであり、その値は条件より決定される。

|  |
| --- |
| µt N  ϵ T  -µt N |
| 図8.1.4 Coulomb摩擦則(実線)および規則化されたCoulomb摩擦則(点線) |

　本ソフトは図8.1.に示すCoulomb摩擦則を採用している。Coulomb則によれば、の時、接触する両物体間すべりなし、粘着摩擦、または静摩擦状態と呼ぶ。または、すべりがはじめる瞬間であり、この状態はすべり摩擦、または動摩擦状態と呼ぶ。

実際問題として、物理的には接触力が摩擦限界に到達しなくでも微小な相対変位を生じるし、また数学的な取り扱いの観点からも摩擦力が相対変位に対して不連続に変化することは好ましくない。そこでCoulomb摩擦則は以下のように規則化されることもある。(図8.1.点線を参照)

## 接触問題の弱形式

　第8.1節では、接触問題を強形式で示した。この章では有限要素法定式化の準備として、接触問題の弱形式を議論する。

### 変分形式

有限要素定式化は一般に変分形式を基本としている。ここでは、接触問題を含む連続体力学の問題の変分式を導く。

　式(2.3.1)~(2.3.3)を参照し、接触を考慮した現配置下のつり合い方程式は以下になる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.1) |

#### 接触積分

つり合い方程式(8.2.1)に任意の重み関数を乗じ、領域ω全体に積分すると次式が得られる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.2) |

ここで、第1項について部分積分を用いて展開し、重みは変位境界では零である制約を加え、次式が得られる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.3) |

ここで、は接触面を表している。

2物体接触問題の弱形式は式(8.2.3)の加算から得られる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.4) |

ここでは、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.2.4a) |
|  | (6.2.4b) |
|  | (6.2.4c) |

　または、作用力と反作用力の法則から

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.5) |

この結果を式(6.2.4c)に代入し、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.6) |

が得られる。

　重み関数は仮想変位である場合では、式(8.2.4)は仮想仕事原理式を示す。このとき、式(8.2.6)は接触に関する仮想仕事である。

#### 仮想仕事原理式

　重み関数は仮想変位であるとき、式(8.2.6)は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.7) |

になる。この節では式(8.2.7)を使いやすい形に変換する。

##### 距離関数の変分

　距離関数(8.2.18)の変分は以下になる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.8) |

##### 距離ベクトル関数の変分

　式(8.2.16)から

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.9) |

##### 仮想変位の接触積分

　まず式(8.2.7)中の接触力を法線方向とすべり方向に分解する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.10) |

そこで、式(8.2.8)、式(8.2.9)と式(8.2.10)を式(8.2.7)に代入すると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.11) |

が得られる。上式の右辺第1,2項はそれぞれ接触面法線方向とすべり方向の仮想仕事を示している。

　ここでは、すべり方向の力成分およびすべり距離ベクトルの変分を以下のように定義し、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.12) |
|  | (8.2.13) |

式(8.2.11)は以下のように変換される。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.14) |
|  | (8.2.15) |

本節でここまで得られた結果を第8.1節に得られた接触拘束条件を加え、接触問題の支配方程式は以下のようにまとめる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.16) |

その制約条件は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.2.16a) |
|  | (6.2.16b) |
|  | (6.2.16c) |
|  | (6.2.16d) |
|  | (6.2.16e) |
|  | (6.2.16f) |
|  | (6.2.16g) |

となる。

　ここまでは、接触に関する仮想仕事を得るため、slave接触面に沿った面積積分を行う必要があることが分かった。しかし、式(8.2.16)に示した接触拘束条件が不等式であり、計算上にそれらの不等式を等式へ変換する必要がある。このような不等式の処理方法は数理計画学分野でいろいろな方法提案されたが、本ソフトは有効セット(active setまたはactive constraint)法を採用する。ここでは、有効接触点は接触状態（貫通量）である状態に有する空間点と意味し、拘束条件は有効接触点だけを対象とし、に関わる積分計算はすべて有効接触領域内で行うことになる。

ある接触点は有効であるかどうかを明示的に表すため、次節では、記号<・>

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.17) |

また非連続関数記号H(・)

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.18) |

を採用する。

　次の節では、等式化された接触拘束条件の取り扱い方法について議論する。

### 接触拘束条件の処理方法

　この節では仮想仕事式(8.2.14)を議論する。ただし、接触処理に注目したいので、項の表現について集中的に議論する。

最適化計算分野では、式(8.2.28)～(8.2.30)に示したKuhn-Tucker条件に対し、いろんな解法を提案された。これらの方法を転用し、有限要素法解析ではよく使われる方法はPenalty関数法、Lagrange乗数法があるが、本ソフトではこの2つ方法のメリットを取り入れたAugmented Lagrange法を採用する。本節では、Penalty関数法、Lagrange乗数法およびAugmented Lagrange法を説明し、それぞれの長点および短点を議論し、Augmented Lagrange法を採用した理由を明らかにする。また、一部の接触拘束は多点拘束条件とみなすことができるので、直接消去法についても説明を行う。

#### Lagrange乗数法

　Lagrange乗数法は新たな独立変数とを導入し、式(8.2.16)を以下のように書き換える。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.19) |
|  | (8.2.20) |

ここでは、新たに導入した変数とはLagrange乗数であり、とは貫通量およびすべり量である。

　ここでは、式(8.2.19)は接触を考慮した仮想仕事式であり、式(8.2.15)から、とはそれぞれ接触面の法線方向とすべり方向の力であることが分かる。そのため、Lagrange乗数法は一種な混合解法であることが分かる。

　Lagrange乗数法は後と紹介するPenalty関数法およびAugmented Lagrange法と比べ、active setは正しく選択した場合では反復計算が必要なく、正確に接触力を得られるが、以下の欠点がある：

* 変数の数が増える。
* 得られた方程式は不定である。

　数値計算で(8.2.19)～(8.2.20)を解くとき、変数の数が増えると計算コストがかかる。または、並列計算を利用したとき、メモリ管理および計算資源の配分も難しくなる。一方、方程式の正定性が失うと、線形方程式ソルバーでの取り扱いが難しくなり、反復法で解くと収束性が悪いこともある。

#### Penalty関数法

　Penalty関数法は制約条件を満たさない点に対して非常に大きなPenaltyを目的関数に付け加えて制約のない問題へ変換する方法である。この方法を採用すると、式(8.2.16)を以下のように書き換える。

　すべり摩擦状態では

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.21) |

となり、粘着摩擦状態では

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.22) |

となる。ここでは、とはPenalty定数であり、とになると、Lagrange乗数法と同様な結果が得られる。しかし、数値解析ではとを有限な数値しか取れないため、Penalty法から得られた結果は第8.1節で紹介した接触条件から外れることになる。

　　Penalty法のメリットは以下である：

* Lagrange法と比べ、変数の数が増えない。
* プログラムに実装しやすい。

Penalty法の欠点は以下である：

* 理論的にはPenalty定数との数値が大きくなると、正解に近い結果が得られるが、数値計算の立場で見ると得られる方程式の性質が悪くなり、線形方程式を反復法で解くと収束性が悪くなる。
* 数値計算ではPenalty定数との数値を有限な数値しか取れないため、得られた結果は近似的である。

#### Augmented Lagrange法（乗数法）

　Penalty法では、Penalty定数が大きくなるにつれて、変換される問題を数値的に行うことが困難になる欠点があった。このような欠点を改良するために、Lagrange関数に、Penalty項を付け替えたAugmented Lagrange関数を導入して、Augmented Lagrange関数の最小化とLagrange乗数の更新により最適解を求めるというAugmented Lagrange法あるいは乗数法と呼ばれる手法が提案されている。

　Augmented Lagrange法では、仮想仕事式を以下のように記述する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.23) |

その制約条件は以下になる

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.24a) |
|  | (6.2.24b) |
|  | (6.2.24c) |
|  | (6.2.24d) |
|  | (6.2.24e) |

ここでは、とはユーザー定義定数であり、Penalty定数のような大きな数値をとる必要がない。仮にとは正確な接触力を表すとき、がゼロになり、上式と式(8.2.19)は一致し、Augmented Lagrange法とLagrange法は同義であることが分かる。

式(8.2.23)の解法はいろいろがある。その一つは単にLagrange法の拡張であり、そのLagrange乗数にユーザー定義定数を加え、Lagrange法は変換される問題の不定性を取り除くことができる。このとき、Lagrange法と同じく、変数の数が増えるが、変換される問題の不定性を取り除かされ、さらにとは大きな数値をとる必要がないので、Penalty法における数値計算上の問題もなくなる。

　上記の解法では、未知となるLagrange乗数を直接解く方法であり、変数の数は増える欠点があった。そこで、Lagrange乗数を反復計算より解く方法（乗数法）を提案された。その計算手順は以下になる。

1. Lagrange乗数の初期値を仮定する。
2. Lagrange乗数の初期値を利用し、式(8.2.23)を解く。
3. 接触力を更新する。
4. 更新後の接触力は式(8.2.24a)を満足するかどうかをチェックする。満足したと判断する場合では計算は終了し、そうでなければLagrange乗数を更新し、ステップ2に戻り、もう一度計算する。

　このアルゴリズムを採用すると、変換される問題の変数の数は増えないが、反復計算が必要となる。

　Lagrange法とPenalty法と比べ、Augmented Lagrange法は若干の計算時間的な犠牲を払い、新しい独立変数を導入せず、数値計算にも悪い影響を与えることがない方法である。その他、Augmented Lagrange法を少し修正すれば、摩擦接触問題から得られた非対称方程式を対称方程式へ変換でき、計算コストの削減にも有力である。そのため、本ソフトはこの方法を採用している。第8.3節では、この方法の実現詳細を説明する。

#### 自由度直接消去法

　接触に関わる制約条件の中で、有効接触点の非貫通条件（式(8.2.28)を参照）または粘着摩擦条件（図8.1.を参照）は以下のように直接節点の位置関係を定義している。

|  |  |
| --- | --- |
| =0 | (8.2.25) |
| =0 | (8.2.26) |

これらの方程式では、関連節点の変位を拘束し、その拘束条件から直接変位自由度を削除することができる。

　ある時刻tで粘着摩擦条件(8.2.26)を満足する時、接触点の速度以下の式が得られる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.27) |

または、点間の初期貫通量であるとき、式(8.2.25)から以下の拘束条件が得られる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.28) |

　自由度直接消去法の応用は限られた範囲内しかできないが、Lagrange法とPenalty法のような数値計算の問題を生じなく、Augmented Lagrange法のような反復計算も必要がないので、有効な方法である。

　本ソフトは微小すべり摩擦なし問題を処理するとき、自由度消去法を採用している。

### 接触仮想仕事の線形化処理

　Newton-Raphson法を用いて非線形方程式を解くとき、その弱形式の線形形式consistent接線係数が必要となる。接触除く部分のconsistent接線係数は第4章を参照できるので、この節では、接触の接線係数を求める方法を説明する。

　式(8.2.14)では接触仮想仕事を示している。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.29) |

本節では、この式にHessian操作をかけ、線形化処理を行う。

#### 法線方向

　式(8.2.29)右側第1項は法線方向変位と関わる仮想仕事である。Lagrange法を採用するとき、その線形化式は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.30) |

となる。また、Penalty法を採用するとき、その線形化式以下のようになる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.31) |

　これらの式を得るため、次では、との計算方法をまとめる。

##### と

　の変分は式(8.2.8)から得られた。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.32) |

式(8.2.8)と同様であり、下記に示す。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.33) |

　式(8.2.24a)と同様で、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.34) |

が得られる。

　次では、接触面の接ベクトルおよび法線ベクトルと関わる計算を行う。しかし、式(8.2.12)に示したように、接触仮想仕事を計算するとき、master面の接ベクトルを使っているので、ここではmaster面と関わるベクトルだけを議論する。

##### 接ベクトルの変分と増分

　現配置の接ベクトルの定義は式(8.1.3)で表している。ここで、接触点の接ベクトルはと書き換え、その変分と増分は以下になる

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.35) |
|  | (8.2.36) |

##### 接触法線ベクトルの変分と増分

　接線方向と法線方向の直交性条件

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.37) |

が得られる。そごで、条件を利用し、法線ベクトルの変分は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.38) |

が得られる。同様法線ベクトルの増分は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.39) |

になる。

　また、から、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.40) |

が得られる。

　まず式(8.1.10)を以下の形式へ変換する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.41) |

上式の変分を考え

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.42) |

になる。

　次に式(8.2.42)の増分計算をとる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.43) |

上式の両側にかけると、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.44) |

が得られる。この式に式(8.2.33)～式(8.2.36)、式(8.2.38)～式(8.2.40)を代入し

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.45) |

となる。

#### 接線方向

　式(8.2.29)右側第2項はすべり方向変位、または摩擦と関する仮想仕事である。式(8.2.29)に示したように、この摩擦仮想仕事式は以下である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.46) |

すべり摩擦状態では

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.47) |

また、完全粘着状態において、Lagrange法を採用するとき

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.48) |

となり、Penalty法を採用するとき

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.49) |

になる。

　摩擦項の線形化形式を得るため、、とを得る必要がある。ここでは、は摩擦構成式と深く関わるため、その説明は第8.3節に譲る。また、前節ではがすでに得られ、続きではを導く。

　式(8.2.43)の両側にをかける。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.50) |

　そこで

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.51) |

である。また、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.52) |

となるから

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.53) |

が得られる。

　式(8.2.53)を式(8.2.47)に代入し

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.54) |

が得られる。

　以上のことから、接触に関わる仮想仕事式 （式(8.2.29)）の増分は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.2.55) |

となり、この式へ式(8.2.32)、式(8.2.45)、式(8.2.34)、式(8.2.54)を代入すれば、との構成関係式を除く、各項すべで揃えた。との構成関係式は時間の増分計算手法と関わるので、次の節では明らかにする。

## 有限要素法接触解析

### はじめに

有限要素法を用いて接触解析を行う場合には、解析すべき領域が有限要素によってモデル化され、表面は端部を構成する要素の要素境界（三次元モデルの場合は面）から構成される。したがって、接触条件は端部の要素境界について考察することになる。

そこで、第8.2節で得られた仮想仕事式(6.2.4)の離散化式は以下のような有限個変数の非線形微分方程式になる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.1) |

ここでは、は内力ベクトル、は接触力ベクトル、は外力ベクトル、は節点変数を表す。特には節点変位を表す場合では、**u**またはとも書く。本章では接触と関わる部分だけを説明する。

　一般的には方程式(6.3.1)は非線形である。その非線形性はとよるものである。内力ベクトルは幾何非線形と材料非線形を含み、接触による非線形は第8.1節および第8.2節で説明した。式(6.3.1)の線形化した式は以下になる

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.2) |

そこで、接触剛性マトリクスは以下のようになる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.3) |

ここでは、接触に関わる外力ベクトルは接触力として式(8.2.29)から計算でき、その線形化した式は式(8.2.55)から計算できる。

　本節での主な目的は式(8.3.2)に示した接触剛性マトリクスを得ることである。

### 接触の離散化表現

#### 接触面の離散化表現

　式(5.1.2)から、面要素内の任意一点座標は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.4) |

になる。ここで、は形状関数であり、は面要素の節点数である。また、面要素内の一点接線方向は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.5) |

になり、その法線方向は式(8.1.4)から計算できる。

#### 接触点探索

|  |
| --- |
| **x** |
| 図8.3.1 slave面からmaster面までの距離 |

　接触点の定義は式(8.1.6)で与えられる。この条件を利用し接触点の位置を計算する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.6) |

この最適化問題をNewton-Raphson法を利用して解く。

　Newton-Raphson法は最適性の必要条件を与える非線形方程式

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.7) |

を初期点接触要素面の中心点から出発して、くり返して解くことより、最適点を見出す。

　ここで、点においてを線形近似すると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.8) |

となるので、解を次の点とすると、は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.9) |

として、この計算まで計算し続ける。

　この計算完了すると、接触点の局所座標が得られる。

ここでは、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.10) |
|  | (8.3.11) |

とする。

#### 接触面上の数値積分

　離散化した接触仮想仕事式(8.2.29)は以下のようになる

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.12) |

また、この式を要素毎に積分すると、次のように近似できる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.13) |

ここで、はslave要素数、は要素積分点数、は積分点座標、は積分点の重み、JはJacobianを表す。または、は積分点kの節点変分ベクトルであり、は積分点kの接触力ベクトルを示し、その詳細は8.3.2.5節に明らかにする。

　積分点のJacobianは下式で計算する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.14) |

　式(8.3.1)に定義した接触力ベクトルは以下になる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.15) |

式(8.3.13)の線形化式は以下になる

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.16) |

　ここで、は積分点kの節点増分ベクトルであり、は要素内積分点kの接触剛性マトリクスである。

　式(8.3.2)で与える全体接触剛性マトリクスは以下になる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.17) |

#### 摩擦力の増分計算

　本節では、摩擦構成式(8.1.3)の時間積分方法を議論する。ここでは、計算ステップnの各物理量は下付き添字nと表し、既知量だと仮定する。計算ステップn+1では、これらの物理量が更新され、下付き添え字n+1と表す。

　摩擦力の計算は後退型Euler積分方法より計算する。具体的には、ステップn+1時の節点変位が得られた後、以下の手順で摩擦力を計算する。

1. 粘着摩擦状態であることを仮定し、摩擦力を計算する。
2. 更新後の摩擦力は摩擦則(8.1.2)を満足するかどうかをチェックする。満足している場合では計算が終了するが、しない場合では、摩擦則(8.1.2)を満足するように修正する。

　Coulomb摩擦則を採用し、またPenalty法を用いて計算する場合では、以下の計算になる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.18) |
|  | (8.3.19) |
|  | (8.3.20) |

次にすべり条件式がチェックされ、各変数を更新する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.21) |

また、Lagrange法を採用する時、Lagrange乗数は直接上式のとと対応しているので、このアルゴリズムはそのまま転用できる。

　式(8.3.21)の線形化式は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.22) |

ここでは式

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.23) |
|  | (8.3.24) |

を利用した。

#### 接触剛性マトリクスおよび接触力：Penalty法

本節では、Penalty法を採用したときの接触剛性マトリクスおよび接触力を導く。本ソフトはAugmented Lagrange法を採用していて、その時の接触剛性マトリクスおよび接触力はPenalty法とも少し変換した形になり、その内容は8.3.3節に詳細に説明する。

式(6.3.15)また式(6.3.18)に示した節点変分と節点増分ベクトルは以下のように書き、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.25) |
|  | (8.3.26) |

式(8.3.13)から接触力は下式へ書き換える

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.27) |

ここではと式(8.3.18)と(8.3.21)より計算する。また、ベクトル**,**とは以下のように定義される。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.28) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.29) |
|  | (8.3.30) |
|  | (8.3.31) |
|  | (8.3.32) |

ここで、マトリクス**A**は式(8.1.18)で与える。

　接触剛性マトリクスは法線方向とすべり方向剛性マトリクスに分解され、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.33) |

各項は式(8.3.16)、式(8.3.15)および式(8.3.22)より得られる。ここで、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.34) |
| + | (8.3.35) |

であり、式(8.3.34)を展開すると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.36) |

になる。

　すべり方向の剛性マトリクスを得るため、次の補助ベクトルを定義する。

|  |  |
| --- | --- |
| , , | (8.3.37) |
|  | (8.3.38) |
|  | (8.3.39) |
|  | (8.3.40) |
|  | (8.3.41) |
|  | (8.3.42) |

ここでは、は式(6.3.25)に定義されたベクトルである。これらの式を利用し、式(8.3.35)の各項は以下のように書き換える。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.43) |

ここでは、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.44) |

また、粘着摩擦状態では

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.45) |

すべり摩擦状態では

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.46) |

である。

### Augmented Lagrange法

　本節ではAugmented Lagrange法のアルゴリズム詳細を議論する。

#### アルゴリズム

　Augmented Lagrange法の支配方程式は式(8.2.23)～式(8.2.24a)で示している。この方法は反復計算を利用し、正確なLagrange乗数値を求められることを節8.2.2.3で説明した。本節では、時間間隔間の変数は下付きn+1と示し、接触仮想仕事を以下のように書き換える。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.47) |

ここで、時間間隔間内の反復計算ステップ数を上付き添え字(k)と示した。

　Augmented Lagrange法の計算手順はすでに8.2.2.3節に説明した。この節では、まず接触力とLagrange乗数の更新方法を説明し、最後に詳細な計算手順をまとめる。

##### 接触力の時間積分

　後退Euler積分法を採用し、式(8.2.24a)の増分計算を行う。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.48) |
|  | (8.3.49) |

ここでは

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.50) |
|  | (8.3.51) |

又、は時刻での摩擦条件(8.2.35)より計算する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.52) |
|  | (8.3.53) |

##### Lagrange乗数の更新

　更新後の接触力はまだ収束していないと判断した場合では、Lagrange乗数を更新する必要がある。ここでは、時間間隔間内のすでにkステップを計算完了し、ステップk+1のLagrange乗数を計算しようとする。

　法線方向Lagrange乗数の更新は以下になる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.54) |

　すべり方向Lagrange乗数を正しく選択すれば、摩擦力と等しくなるので、式(8.3.48)と比べれば、すべり方向Lagrange乗数の更新は以下になることが分かる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.55) |

ここでは、は式(8.3.53)より計算する。

##### 計算手順

|  |
| --- |
| 1. 初期設定     k=0   1. 下式を解き、を得る。   ここでは、は式(8.3.49)より計算する。   1. 式(8.3.48)～式(8.3.52)を従い、接触力とを計算する。 2. 以下の接触拘束条件をチェックする。   ；　粘着摩擦状態では  IF ( 以上条件を満足する ) THEN  収束と判断し、計算終了  ELSE  式(8.3.53)と(8.3.54)を従い、Lagrange乗数を更新する。    GOTO 2  ENDIF |

|  |
| --- |
| 表8.3.1 乗数法アルゴリズム |

#### 対称化処理

　後退Euler積分法式(8.3.48)～式(8.3.52)を採用している場合、式(8.3.47)から得られるconsistent接触剛性マトリクスは非対称である。この節では、第8.3.3.1節に紹介したアルゴリズムを修正し、を対称化する方法を説明する。

　対称化処理のため、式(8.3.52)に示した摩擦降伏関数を以下のように修正する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.56) |

ステップkでの計算では、を定数として処理しているため、摩擦力の更新計算(8.3.18)は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.57) |

となり、その線形化式から非対称項を取り除くことができる。式の詳細は8.3.3.3節に明らかにする。

　式(8.3.56)に示した処理は計算ステップkでは、法線方向の接触力の変化を無視することである。この処理により、更新後の接触力はCoulomb摩擦則を満足しないことになる。しかし、Lagrange乗数は常に式(8.3.54)、式(8.3.55)より更新するので、理論的には対称化処理のない計算と同じ結果が得られる。

　対称化処理後のAugmented Lagrange法の実行手順は表8.3.1に示した手順を参照することできるが、以下の区別を注意すべきである。

1. ステップ2では、の計算は式(8.3.49)に示したものではなく、式(8.3.57)である。
2. ステップ4での収束判断では、の誤差もチェックする必要がある。

#### Consistent剛性マトリクスおよび接触力

　第8.3.2.5節では、Penalty法の接触剛性マトリクスと接触力の計算式を求めたが、本節では、非対称Augmented Lagrange法または対称化したAugmented Lagrange法のconsistent剛性マトリクスおよび接触力の計算式を求める。また、接触力の計算方法を除き、これらの式の求め方は節8.3.2.5節に示した方法と同じなので、本節では、結果だけを示す。

##### 接触力

　式(8.3.27)と同じく、接触力は以下になる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.58) |

ただし、ここではと式(8.3.48)、式(8.3.49)または式(8.3.57)より計算する。

　式(8.3.33)と同じく、剛性マトリクスは法線方向とすべり方向剛性マトリクスからなる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.59) |

##### 法線方向接触マトリクス

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.60) |

　式(8.3.35)と同じく、接触方向剛性マトリクスも以下のように分解する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.61) |

##### 非対称剛性マトリクス

　式(8.3.43)、式(8.3.44)と照らし合わせ、対称化処理なし時の剛性マトリクスは以下になる。

　粘着摩擦状態では

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.62) |

すべり摩擦状態では

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.63) |

##### 対称剛性マトリクス

式(8.3.43)、式(8.3.44)と照らし合わせ、対称化処理後の剛性マトリクスは以下になる。

　粘着摩擦状態では

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.64) |

すべり摩擦状態では

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.65) |

### 微小すべり解析

　すべりによる接触面の幾何形状を無視できる場合は、微小すべり状態と定義する。このとき、線形化処理した仮想仕事式は以下になる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.66) |

または接触面の相対すべり量は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.67) |

になる。これらの式を式(8.3.16)、式(8.2.34)と比べると、有限すべりと微小すべりの区別が分かる。微小すべり計算は有限すべり計算と比べ、計算式は短くでき、計算コストを削減できる。本ソフトウェアでは、微小すべり計算も選択できる。

　対称化したAugmented Lagrange法を採用するとき、法線方向接触剛性マトリクスは以下になる。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.68) |

摩擦なし状態では、接触剛性マトリクスは式(8.3.67)になる。

　摩擦のある場合、粘着摩擦状態では

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.69) |

すべり摩擦状態では

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.70) |

または、対称化したAugmented Lagrange法を採用するとき、すべり状態では

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.3.71) |

となる。

### まとめ

本節では有限要素法より接触問題の解析方法についてまとめた。本ソフトはAugmented Lagrange法を用い、有限変形、微小変形接触問題を解析する機能を有し、主に本節で得られた以下の結果を利用している。

1. 微小すべり状態の接触剛性マトリクス（式(8.3.68)~式(8.3.71)）。

2. 有限すべり状態の接触剛性マトリクス（式(8.3.59)~式(8.3.65)）。

4. 接触力の計算式（式(8.3.48)、式(8.3.49)、式(8.3.57)、式(8.3.58)）。

　5. 計算アルゴリズム（表8.3.1）。

# 付録

## MPCを考慮したCG法

　x: 全自由度のベクトル(dim(x) = n)

x': 独立自由度だけのベクトル(dim(*x'*) = n*ind* < n)

とする、MPCの条件式は

　x=Tx' (dim(T)=n×nind)

の形で書ける。例えば、自由度数が5 で、*x*3 = 0.5*x*2 という条件を課す場合、

となる。しかし、*x0* の長さが*x* と違うことが、プログラミング上面倒。

*x* : 全自由度のベクトル(dim(*x*) = *n*)

*x'* : 独立自由度だけが意味を持つベクトル(*dim*(*x'*) = *n*)

とすると、MPC の条件式は、

*x* = *Tx'* (*dim*(*T*) = *n* × *n*)

の形で書ける。ここで、*T* の、従属自由度に対応する列にはすべて0 をいれる。例えば、自由度数が5 で、*x*3 =0.5 *x*2 という条件を課す場合、

となる。

　解くべき方程式は、

*Ax* = *b*

*A*(*Tx'*) = *b*

(*TTAT*)*x'* = *TT b*

と書ける。ここで

*A'* = *TTAT* (dim(*A'*) = *nind × nind*)

*b'* = *TT b* (dim(*b'*) = *nind*)

と置くと

*A'x'* = *b'*

を解けばよいことになる。

　ここで、*A'* は、従属自由度に対応する行および列にはすべて0 が入っている。つまり、逆行列がなく、解は無限に存在する。実際には、*x'* の従属自由度に対応する部分は何が入ってもよい(影響ない)

ので、とりあえず解が唯一となるよう、*x'*(*dep*) = 0 となるようにすることにする。このためには、

*Idep* : *n*×*n*正方行列で、従属自由度に対応する対角成分が1 で、他はすべて0という行列を定義し、これを用いて、

(*A'* + *Idep*)*x'* = *b'*

とすればよい。

**CG** 法のアルゴリズム

while not converged

do

end

　CG 法の場合には、初期ベクトル*x*0 を0 としておけば、*Idep* を足さなくても、従属自由度に関しては、0 *\** 0 = 0 という式になり、残差ベクトルも探索ベクトルも0 となるので、必ず*x'*(*dep*) = 0 という解が得られることになる。したがって、*A* を*TTAT* で置き換えるだけで十分である。

　上記アルゴリズムでは、*A'* = *TTAT* を計算する必要はない。ソルバーのループの中やをやればいい。しかも、*T* は極めて疎であるため、データ構造などを工夫すれば、毎ステップのかけ算による計算量も小さく抑えることができる。

**並列化** 普通のCG 法と異るのは、ベクトルに*T* や*TT* をかける部分のみ。この部分で通信が必要となり、MPCで結ばれた隣の領域の節点が、自分の領域の袖領域に含まれている必要がある。

　これは、ペナルティ法によるMPC を並列対応させた際、パーティショナでMPC 節点同士の接続関係を作るようにしたが、これによってすでに対応できている。

**前処理**

## 座標変換

### 埋め込み座標系中のひずみと応力

　EAS要素、ANS要素やMITC要素など多くな要素定式化は埋め込み座標系、あるいは自然座標系中で行う。この節では、埋め込み座標系中のひずみと応力定義を行う。

　変形前後の配置Xとxは、変位値u

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.2.1) |

変形前後の共変ベースベクトルは

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.2.2) |

である。Jacobianは

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.2.3) |

　変形勾配Fは

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.2.4) |

となり、Green-LagrangeひずみEは

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.2.5) |

そこで

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.2.6) |

であるため

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.2.7) |

Green-Lagrangeひずみと共役する第2 Piola-Kirchhoff応力が

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.2.8) |

となる。

### 埋め込み座標系から他の座標系への変換

　任意の２階テンソルEを二つ座標系で表すと

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.2.9) |

　ここから

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.2.10) |

という変換式が得られる。ここでと書くとと得られる。しかし、有限要素法解析では、ひずみや応力のような２階テンソルは一次配列に書き換えることが多く、上記変換式をこのような形へ変換した方が便利である。

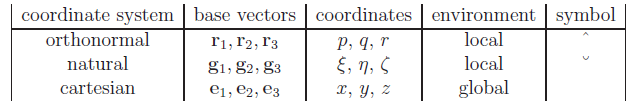
|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.2.11) |

応力の対称性を考慮し、上式ひずみと応力と対応すると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.2.12) |

となる。

梁やシェル要素の場合では、埋め込み座標系の他、局所直交座標と全体Cartesian座標三つの座標系間に変換する必要がある。

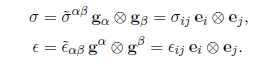


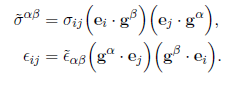
局所直交座標と埋め込み座標系間の変換方法が以下である。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.2.13) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.2.14) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.2.15) |







# 参考資料

1. 久田俊明，非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎，丸善，1992.
2. 久田俊明，野口裕久，非線形有限要素法の基礎と応用，丸善，1995．
3. 冨田佳宏，数値弾塑性力学，養賢堂，1990．
4. Bathe, K. -J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, 1982.
5. Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., The Finite Element Method, 6th Ed., Vol. 2, Solid and Fluid Mechanics, Dynamic and Nonlinearity, McGraw-Hill, 2005.
6. Dhondt, G., The Finite Element Method for Three-dimensional Thermomechanical Applications, John Wiley & Sons Ltd, 2004
7. Souza Neto E.A., Peric, D., Owen, D.R.J., Computational Methods for Plasticity: Theory and Application, Wiley InterScience, 2009
8. Bonet, J. and Wood, R. D., Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis, 1st ed., Cambridge University Press, 1997
9. Simo, J. C. and Hughes, T. J. R., Computational Inelasticity, Springer, 1998.
10. T.J.R. Hughes. The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1987
11. Laursen, T.A., Computational Contact and Impact Mechanics: Fundamental and Modelling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis, Springer Verlag, 2003
12. Wriggers, P., Computational Contact Mechanics, John Wiley & Sons Ltd, 2002
13. Hughes, T.J.R. and Winget, J., Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis, Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 15, 1980, pp. 1862-1687.
14. Taylor, R.L., Beresford, P.J. and Wilson, E.L., A non-conforming element of stress analysis, Int. J. Num. Methods Eng., Vol.10, 1976, pp1211-120
15. Hughes,T.J.R., Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media, Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 15, 1980, pp. 1413-1418
16. Dvorkin, E.N. and Bathe, K.J., A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis, Eng. Comput., vol.1, 1994, pp.77-88
17. Lee, P.S., Bathe, K.J., Development of MITC isotropic triangular shell finite elements, Computers & Structures, vol.82, 2004, pp945-962
18. Bathe, K.J., Dvorkin, E.N., A formulation of general shell elements-The use of mixed interpolation of tensorial components, Int. J. Num. Methods Eng., Vol.22, 1986, pp697-722
19. Bucalem, M.L. and Bathe, K.J., Higher-order MITC general shell element, Int. J. Num. Methods Eng., Vol.36, 1993, pp 3729-3754
20. Newmark, N.M, A Method of Computation for Structural Dynamics, ASCE Journal of Engineering Mechanics Division, Vo.85. No EM3, 1959
21. H. Hilber, T.J.R. Hughes, and R.L. Taylor. Improved numerical dissipation for　the time integration algorithms in structural dynamics. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 5:283-292, 1977.
22. J. Chung, G.M.Hubert, A Time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: The Generalized-α Method, ASME Journal of Applied Mechanics, 60, 371-375, 1993
23. Williams, M.L., Landel, R.F. and Ferry, J.D., "The Temperature Dependence of Relaxation Mechanisms in Amorphous Polymers and Other Glass-forming Liquids", Journal of the American Chemical Society, Vol. 77, pp. 3701-3706 (1955).
24. O. S. Narayanaswamy. *"A Model of Structural Relaxation in Glass"*. *Journal of the American Ceramic Society*. Vol. 54, No. 10. pp. 491-498. 1971.
25. Zienkiewicz,  O. C., C. Emson, and P. Bettess, “A Novel Boundary Infinite Element,” International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 19, pp. 393–404, 1983
26. J. Lysmer, R.L. Kuhlemeyer, "Finite dynamic model for infinite media", Journal of the Engineering Mehcnaics Division, ASCE, Vol.95, No.4, pp. 859-877, 1969
27. Cohen,  M., and P. C. Jennings, *Silent Boundary Methods for Transient Analysis* (in *Computational Methods for Transient Analysis*), Ed. T. Belytschko and T. R. J. Hughes, Elsevier, 1983
28. J.L.Olson, K-J Bathe: Analysis of fluid-structure interactions. A direct symmetric coupled formulation based on the fluid velocity potential, Computers & Structures, VOl.21, No1/2, pp.21-32, 1985
29. T.A.Vernon, B.Bara, D.Hally, A surface panel method for the calculation of added mass matrices for finite element models, Technical memo. 88/203, Defense research establishment Atlantic, 1988
30. Rene De Borst: The zero-normal stress condition in plane-stress and shell elastoplasticity, Communications in applied numerical methods, vol. 7 29-33, 1991